

Matematikk 3

Andre ordens diffligninger - Introduksjon

Litt mekanikk

Vårt mål:
beskrive klossens
bevegelse

Vår strategi:
forstå alle
kreftene som
virker på klossen

Hookes lov:

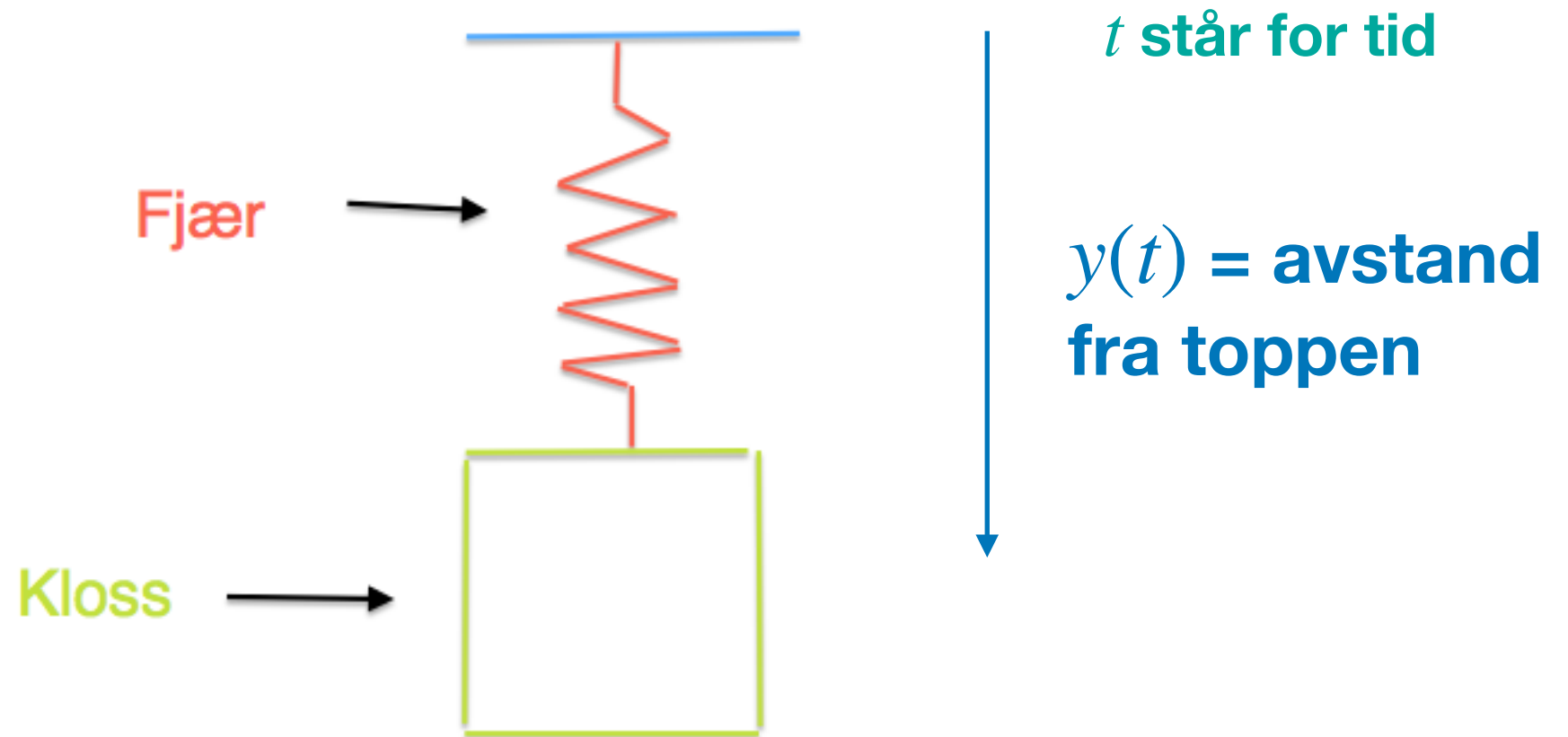
$$F(y) = -ky$$

kraften som virker
på klossen

Newtons andre lov:

$$-ky(t) = my''(t)$$

m er klossens
masse

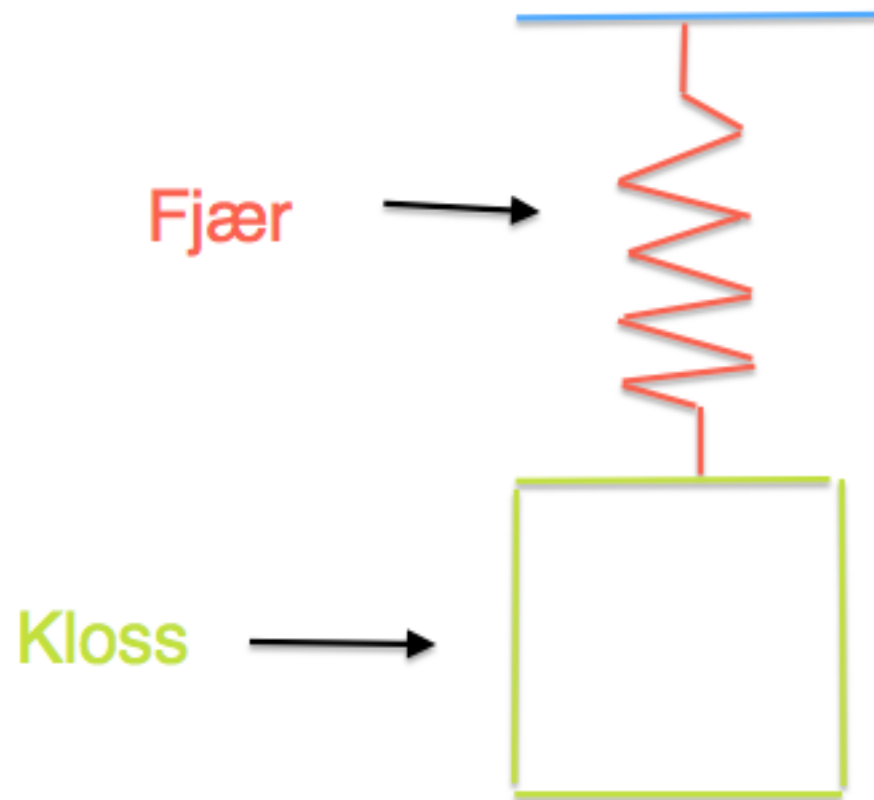


k er en konstant
bestemt av fjæren

Litt mekanikk

Vårt mål:
beskrive klossens
bevegelse

Vår strategi:
forstå alle
kreftene som
virker på klossen



t står for tid

$y(t)$ = avstand
fra toppen

k er en konstant
bestemt av fjæren

m er klossens
masse

Newtons andre lov: $-ky(t) = my''(t)$

$$my''(t) + ky(t) = 0$$

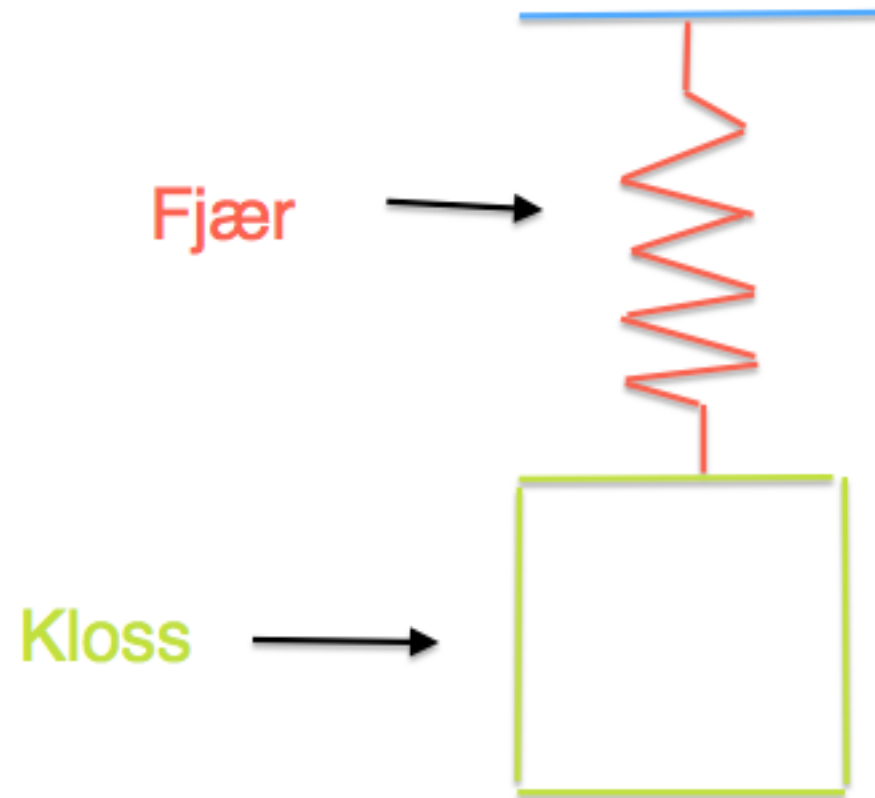
en andre ordens differensialligning

Litt mekanikk

Vårt mål:
beskrive klossens
bevegelse

Vår strategi:
forstå alle
kreftene som
virker på klossen

$f(t)$ er en ekstern
kraft



t står for tid

$y(t)$ = avstand
fra toppen

k er en konstant
bestemt av fjæren

m er klossens
masse

c er en konstant
bestemt av
omgivelsen

$$f(t) = my''(t) + ky(t) - cy'(t)$$

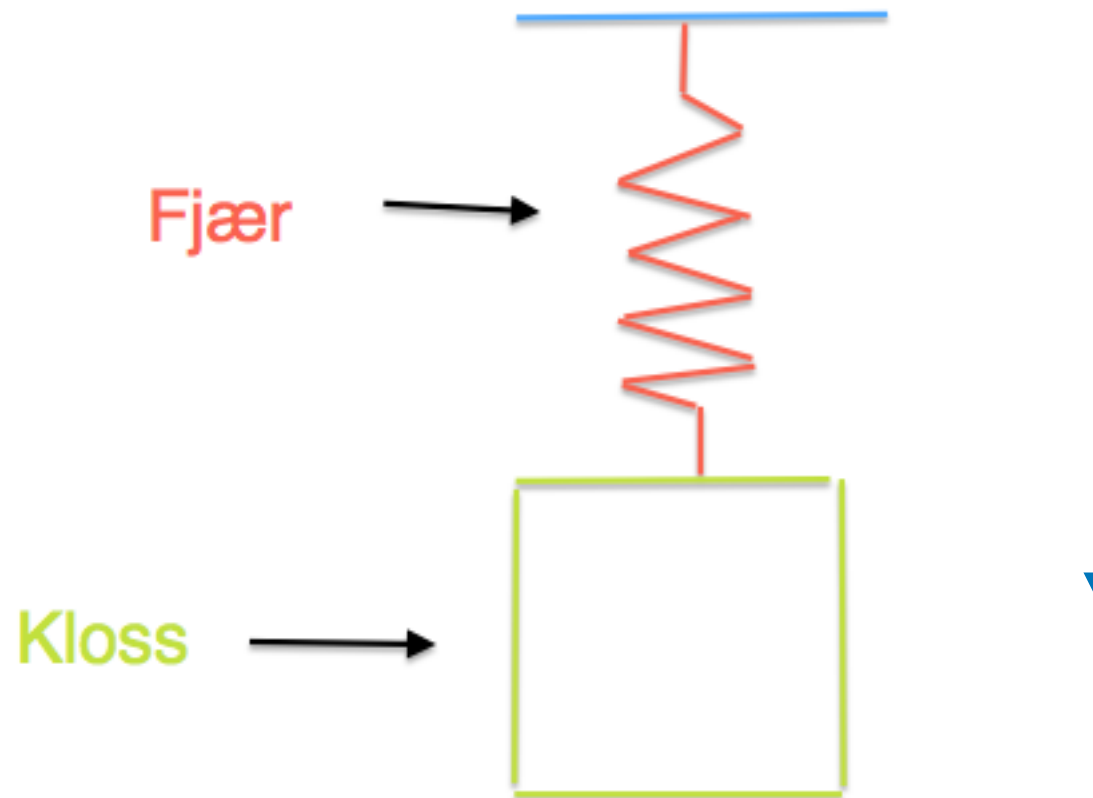
Litt mekanikk

Vårt mål:
beskrive klossens
bevegelse

Vår strategi:
forstå alle
kreftene som
virker på klossen

$f(t)$ er en ekstern
kraft

en andre ordens differensialligning



t står for tid

$y(t)$ = avstand
fra toppen

k er en konstant
bestemt av fjæren

m er klossens
masse

c er en konstant
bestemt av
omgivelsen

$$my''(t) - cy'(t) + ky(t) = f(t)$$

Andre ordens differensialligninger

$$my''(t) - cy'(t) + ky(t) = f(t)$$

en andre ordens differensialligning

Hvorfor gjør vi det?

- slike ligninger er **viktige** og har mange **anvendelser**

- vi kan løse dem med våre **metoder**

egenverdier

egenvektorer

diagonalisering

basiser

⋮

Matematikk 3

Andre ordens diffligninger - Homogene ligninger

Homogene ligninger

a_0, a_1 er konstante
reelle tall

kan erstattes med et åpent intervall

$y(t)$ er en funksjon $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

vi antar at $y(t)$ er to ganger
kontinuerlig deriverbare

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

andre ordens differensialligning (med konstante koeffisienter)

Vårt mål er å beskrive alle løsninger

en “homogen” ligning

$$0 = y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$$

en “inhomogen” ligning

kommer senere

$$f(t) = y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$$

Homogene ligninger

a_0, a_1 er konstante
reelle tall

vi antar at $y(t)$ er to ganger
kontinuerlig deriverbare

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

andre ordens differensialligning (med konstante koeffisienter)

Vårt mål er å beskrive alle løsninger

Eksempler:

- $y''(t) + y(t) = 0$
- $y''(t) - y(t) = 0$
- $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$

• ...

Homogene ligninger

vi antar at $y(t)$ er to ganger
kontinuerlig deriverbare

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Løsningsmengden til $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ er et **reelt vektorrom**.

• **nullfunksjonen** er en løsning ✓

et underrom i
 $V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• for to løsninger $y_1(t)$ og $y_2(t)$:

$$(y_1(t) + y_2(t))'' = y_1''(t) + y_2''(t) = -a_1 y_1'(t) - a_0 y_1(t) - a_1 y_2'(t) - a_0 y_2(t)$$

$$= -a_1(y_1(t) + y_2(t))' - a_0(y_1(t) + y_2(t))$$

$y_1(t) + y_2(t)$ er også
en løsning ✓

• for en løsning $y(t)$ og et reelt tall c :

$$(cy(t))'' = c(-a_1 y'(t) - a_0 y(t)) = -a_1 (cy(t))' - a_0 (cy(t))$$

$cy(t)$ er også
en løsning ✓

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Løsningsmengden til $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ er et **reelt vektorrom**.

- **Hvordan finner vi alle løsninger?**

hva er dimensjonen av løsningsrommet?

Matematikk 3

Andre ordens diffligninger - Løsningsmetoden

Homogene ligninger

a_0, a_1 er konstante
reelle tall

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

vi antar at $y(t)$ er to ganger
kontinuerlig deriverbare

$$V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

andre ordens differensialligning (med konstante koeffisienter)

Løsningsmengden til $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ er et **reelt vektorrom**.

- **Hvordan finner vi alle løsninger?**

hva er dimensjonen av
løsningsrommet?

Homogene ligninger

a_0, a_1 er konstante
reelle tall

vi antar at $y(t)$ er to ganger
kontinuerlig deriverbare

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

løsningsidé

• vi setter $x_1(t) = y(t)$ og $x_2(t) = y'(t)$

• vi får nå to ligninger $x_1'(t) = x_2(t)$

$$x_2'(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

system av
differensialligninger

dette kan vi løse!

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

løsningsidé

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

system av
differensialligninger

- anta at λ er en egenverdi til dvs λ oppfyller $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

da er $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ er egenvektor

$$\lambda^2 = -a_1 \lambda - a_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -a_0 - a_1 \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

løsningsidé

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

system av
differensialligninger

- anta at λ er en egenverdi til

med $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ som egenvektor

- da er $e^{\lambda t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ en løsning for systemet

første

komponente

- da er $y(t) = x_1(t) = e^{\lambda t}$ en løsning for

vi sjekker: $(e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t} = (-a_1 \lambda - a_0) e^{\lambda t} = -a_1 (e^{\lambda t})' - a_0 e^{\lambda t}$ ✓

$$\lambda^2 = -a_1 \lambda - a_0$$

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Vi oppsummerer:

$y(t) = e^{\lambda t}$ er en løsning når λ er en egenverdi til $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$

- to reelle egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dvs løser $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

vi har
3 muligheter

- to komplekse egenverdier $\lambda = a + ib$ og $\bar{\lambda} = a - ib$

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

- én reell egenverdi λ

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

legg merke til
en **ekstra faktor** t

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Vi oppsummerer en gang til:

Teorem: Løsningsmengden er et reelt vektorrom av **dimensjon 2** som er utspent av de to lineært uavhengige funksjonene

- $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$ dersom vi har to reelle egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- $e^{at} \cos(bt)$ og $e^{at} \sin(bt)$ for to komplekse egenverdier $\lambda = a + ib$ og $\bar{\lambda}$
- $e^{\lambda t}$ og $te^{\lambda t}$ dersom vi har kun én reell egenverdi λ

Matematikk 3

Andre ordens diffligninger - Eksempler

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Vi har lært:

Teorem: Løsningsmengden er et reelt vektorrom av **dimensjon 2** som er utspent av

- $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$ dersom vi har to reelle egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- $e^{at} \cos(bt)$ og $e^{at} \sin(bt)$ for to komplekse egenverdier $\lambda = a + ib$ og $\bar{\lambda}$
- $e^{\lambda t}$ og $te^{\lambda t}$ dersom vi har kun én reell egenverdi λ

Homogene ligninger

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

Løsningsstrategi:

- **bestem løsningene λ til ligningen $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$**
- **avhengig av type løsninger skriv ned løsningen til**

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) - y(t) = 0$$

$$\bullet \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = -1 \text{ eller } \lambda = 1$$

to reelle løsninger

- den generelle løsningen er på formen

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

- $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

$$\iff \lambda = 1 \text{ eller } \lambda = 2$$

to reelle løsninger

- den generelle løsningen er på formen

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) + y(t) = 0$$

$$\begin{aligned}\bullet \lambda^2 + 1 = 0 & \iff (\lambda - i)(\lambda + i) = 0 \\ & \iff \lambda = i \text{ eller } \lambda = -i\end{aligned}$$

to komplekse
løsninger

- den generelle løsningen er på formen

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$$

- $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = -1$

$$\iff \lambda = 2 + i \text{ eller } \lambda = 2 - i$$

to komplekse
løsninger

- den generelle løsningen er på formen

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t$$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

- $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0$

$$\iff \lambda = 2$$

kun én reell løsning

- den generelle løsningen er på formen ...

la oss se på dette litt nærmere

Homogene ligninger

Løsningsstrategi: • bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

• sjekk type av løsningene

• skriv ned løsningen til diffligningen

Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

kun én reell løsning

for mer bruker
vi et triks:

• $y(t) = e^{2t}$ er en løsning ✓

$$(y(t)e^{-2t})'' = (e^{-2t}(y'(t) - 2y(t)))'$$

$$= -2e^{-2t}(y'(t) - 2y(t)) + e^{-2t}(y''(t) - 2y'(t))$$

$$= e^{-2t}(y''(t) - 4y'(t) + 4y(t)) = 0$$

vi antar at $y(t)$
er en løsning

$= 0$

Homogene ligninger

- Løsningsstrategi:**
- bestem løsningene til $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
 - sjekk type av løsningene
 - skriv ned løsningen til diffligningen

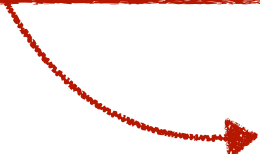
Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

kun én reell løsning

for mer bruker
vi et triks:

- $y(t) = e^{2t}$ er en løsning ✓


$$(y(t)e^{-2t})'' = 0$$

vi integrerer
to ganger

$$y(t)e^{-2t} = c_1t + c_0$$

vi deler
på $e^{-2t} \neq 0$

$$y(t) = c_1te^{2t} + c_0e^{2t}$$

er den generelle løsningen

Matematikk 3

Andre ordens difflikninger - Inhomogene likninger

Inhomogene ligninger

der $f(t)$ er en
kontinuerlig funksjon

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \neq 0$$

en inhomogen andre ordens differensialligning

Hvordan finner vi alle løsninger?

løsningsidé

- anta vi har funnet én løsning $y_p(t)$
- dersom $y(t)$ er en annen løsning

så er $y(t) - y_p(t)$ en løsning til $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$

den tilsvarende homogene ligningen

Inhomogene ligninger

der $f(t)$ er en
kontinuerlig funksjon

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

en **inhomogen** andre ordens differensialligning

Løsningsstrategi:

- finn én partikulær løsning $y_p(t)$ til
- finn den generelle løsningen $y_h(t)$ til den homogene ligningen
- alle løsninger til den inhomogene ligningen er på formen

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Inhomogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Løsningsstrategi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

én partikulær
løsning

homogene
løsninger

Hvordan finner vi $y_p(t)$?

det finnes en formel i notatene

Strategi: Vi prøver med $y_p(t)$ av samme type som $f(t)$

dvs dersom $f(t)$ er

- på form e^{at} så prøv $y_p(t) = ce^{at}$
- på form $\sin(at)$ eller $\cos(at)$ så prøv $y_p(t) = c_1 \sin(at) + c_2 \cos(at)$
- en polynom så prøv $y_p(t)$ en polynom av samme grad
- $\vdots$

Inhomogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Strategi:

Vi prøver med $y_p(t)$
av samme type som $f(t)$

Løsningsstrategi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

én partikulær
løsning

homogene
løsninger

Eksempel:

$$y''(t) - y(t) = t^2 + t \quad \text{vi prøver } y_p(t) = at^2 + bt + c$$

vi setter
 $y_p(t)$ inn

$$t^2 + t = (at^2 + bt + c)'' - (at^2 + bt + c)$$

$$= 2a - at^2 - bt - c = -at^2 - bt - c + 2a$$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t^2 - t + 2$$

$$\text{dvs } a = -1, b = -1, c = 2$$

Inhomogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Strategi:

Vi prøver med $y_p(t)$
av samme type som $f(t)$.

Løsningsstrategi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

én partikulær
løsning

homogene
løsninger

Eksempel: $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 8 \cos t$ sett $y_p(t) = a \cos t + b \sin t$

vi setter
 $y_p(t)$ inn

$$8 \cos t = (a \cos t + b \sin t)'' - 4(a \cos t + b \sin t)' + 5(a \cos t + b \sin t)$$

$$= -a \cos t - b \sin t + 4a \sin t - 4b \cos t + 5a \cos t + 5b \sin t$$

$$= (4a - 4b) \cos t + (4a + 4b) \sin t$$

dvs $a = 1, b = -1$

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t + \cos t - \sin t$$

Inhomogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Strategi:

Vi prøver med $y_p(t)$
av samme type som $f(t)$.

Løsningsstrategi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

én partikulær
løsning

homogene
løsninger

Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$$

$$\text{sett } y_p(t) = ce^{2t}$$

vi setter
 $y_p(t)$ inn

$$e^{2t} = (ce^{2t})'' - 4(ce^{2t})' + 4ce^{2t}$$

$$= 4ce^{2t} - 8ce^{2t} + 4ce^{2t}$$

$$= 0$$

$y_p(t)$ løser **ikke** den
inhomogene ligningen

problemet er at $f(t) = e^{2t}$ er en homogen løsning

Inhomogene ligninger

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Strategi:

Vi prøver med $y_p(t)$
av samme type som $f(t)$.

Løsningsstrategi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

én partikulær
løsning

homogene
løsninger

~~sett $y_p(t) = ce^{2t}$~~

~~sett $y_p(t) = cte^{2t}$~~

prøv med en ekstra t

sett $y_p(t) = ct^2 e^{2t}$

prøv med en ekstra t^2

Eksempel:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$$

vi setter
 $y_p(t)$ inn

$$e^{2t} = (ct^2 e^{2t})'' - 4(ct^2 e^{2t})' + 4ct^2 e^{2t}$$

dvs $c = \frac{1}{2}$

$$= ce^{2t}(4t^2 + 8t + 2) - 4ce^{2t}(2t^2 + 2t) + 4ct^2 e^{2t}$$

$$= 2ce^{2t}$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

Matematikk 3

Andre ordens diffligninger - Initialverdiproblemer

Initialverdiproblemer

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

sammen med

$$\begin{aligned} y(t_0) &= a \\ y'(t_1) &= b \end{aligned}$$

t_0, t_1 to verdier
der y er definert

a og b er reelle tall

Initialverdiproblem: Vi vil finne en løsning til ligningen
som også oppfyller kravene i t_0 og t_1

Hvordan løser vi dette?

- vi løser ligningen
- vi tilpasser koeffisientene til kravene

Initialverdiproblemer

Eksempel:

$$y''(t) - y(t) = t^2 + t$$

sammen med

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2$$

Vi kjenner den generelle løsningen:

vi krever
nå

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t^2 - t + 2$$

$$1 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 - 0^2 - 0 + 2$$

$$\text{dvs } c_1 + c_2 = -1$$

$$2 = y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 - 1$$

$$\text{dvs } c_1 - c_2 = 3$$

$$y(t) = e^t - 2e^{-t} - t^2 - t + 2$$

$$\text{altså } c_1 = 1 \text{ og } c_2 = -2$$

Initialverdiproblemer

Eksempel: $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$

sammen med

$$y(0) = 1$$

$$y'(1) = e^2$$

Vi kjenner den generelle løsningen:

vi krever
nå

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

$$1 = y(0) = c_1$$

$$\text{dvs } c_1 = 1$$

$$e^2 = y'(1) = e^2(2c_1 + 3c_2 + 2)$$

$$\text{dvs } c_2 = -1$$

$$y(t) = e^{2t} - t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$