

Matematikk 3

Vektorrom - Motivasjon: Ligningssystem

Motivasjon

Vi løser ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 3x_5 &= 0\end{aligned}$$

ekvivalent ligningssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

radoperasjoner...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redusert trappeform

Vi løser ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

frie variabler

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivotkolonner

Vi finner løsninger:

velg $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$
og beregn x_1, x_3

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

velg $x_2 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$
og beregn x_1, x_3

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

velg $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$
og beregn x_1, x_3

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi løser ligningssystemet

$$x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vi kan finne flere løsninger:

$$\mathbf{v} = r \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **skalere** en løsning, dvs **gange med et reelt tall**, og får en ny løsning

- **legge sammen** løsninger og får en ny løsning

"Løsningsmengden oppfører seg på en pen måte."

Vi løser ligningssystemet

$$x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$$

$$\mathbf{v} = r \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• **5 koordinater**

vs

• **3 frie parameter**

Løsningsmengden er

- ikke noe fem dimensjonalt, men heller
- et **“tre dimensjonalt underrom”** av $\mathbb{R}^5$ utspent av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Mål: Gi en **presis mening** til disse ordene!

Matematikk 3

Vektorrom - Motivasjon: Differensialligninger

Motivasjon

Finn funksjonene $y(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

andreordens
differensialligning
løsningsmetoden
kommer senere

vi prøver og setter inn...

- $y(t) = e^t$

$$y'(t) = e^t$$

$$y''(t) = e^t$$

$$y''(t) + y(t) = e^t + e^t = 2e^t \neq 0$$

Finn funksjonene $y(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

vi prøver og setter inn...

• $y(t) = \cos t$ ✓ $y'(t) = -\sin t$ $y''(t) = -\cos t$

$y''(t) + y(t) = (-\cos t) + \cos t = 0$ ✓

Finn funksjonene $y(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

vi prøver og setter inn...

- $y(t) = \cos t$ ✓

- $y(t) = \sin t$ ✓ $y'(t) = \cos t$ $y''(t) = -\sin t$

$y''(t) + y(t) = (-\sin t) + \sin t = 0$ ✓

Finn funksjonene $y(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

• $y(t) = \cos t$ ✓
er en løsning

• $y(t) = \sin t$ ✓
er en løsning

Det finnes flere løsninger...

• $y(t) = 3 \cos t$ ✓

• $y(t) = -\sqrt{7} \sin t$ ✓

• $y(t) = 3 \cos t + (-\sqrt{7} \sin t)$ ✓ ...

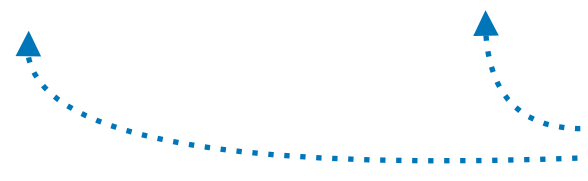
Finn funksjonene $y(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 \text{ for alle } t$$

• $y(t) = \cos t$ ✓

• $y(t) = \sin t$ ✓

Generelt: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ er en løsning

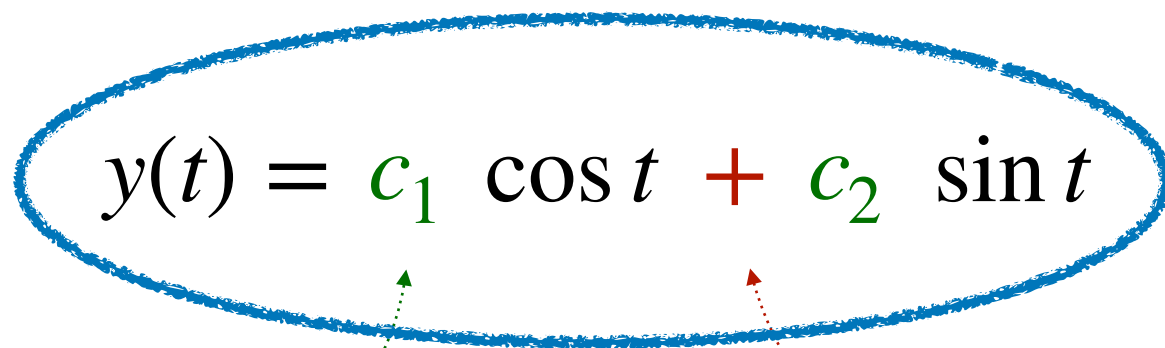
 konstant

Spørsmål: Gir oss dette **alle** løsninger $y(t)$?

Motivasjon

Spørsmål: “**Hvor stor**” er løsningsmengden til ligningen

$$y''(t) + y(t) = 0 ?$$


$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Vi kan altså

- **skalere** en løsning, dvs **gange med et reelt tall**, og får en ny løsning

- **legge sammen** to løsninger og får en ny løsning

Det er samme **operasjoner** vi kjenner fra **vektorer** i $\mathbb{R}^n$.

“Vi kan danne **lineærkombinasjoner** av løsninger og får en ny løsning.”

Motivasjon

Observasjon: Løsninger til ligningen $y''(t) + y(t) = 0$
oppfører seg som vektorer.

Mål: Finne et rammeverk der vi kan

- regne med **funksjoner** som med **vektorer**
- snakke om **dimensjon**, dvs “størrelse” av en mengde
- **gi mening** til setningen:

Løsningsmengden til $y''(t) + y(t) = 0$ er et **rom av dimensjon 2** utspent av $y_1(t) = \cos t$ og $y_2(t) = \sin t$.

Matematikk 3

Vektorrom - Aksiomene

Hva er egentlig en vektor?

Men hva er det for noe? 

Matematiker: En vektor er **et element i et vektorrom.**

Mest effektivt!

Data Scientist: En vektor er en **kolonne med tall.**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -37 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lett å regne med

Fysiker: En vektor er en **pil.**



noe med lengde og retning

Lett å forestille seg

Vektorer i $\mathbb{R}^3$

Husk: I $\mathbb{R}^3$ kan vi lage **lineærkombinasjoner**.

- Vi kan **legge sammen** to vektorer:

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

for eksempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

- og vi kan **gange** en vektor **med et reelt tall**:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

for eksempel $(-7), \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto (-7) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{bmatrix}$

Vektorrom

elementer i V kalles **vektorer**

Et **vektorrom** er en mengde V der vi kan danne **lineærkombinasjoner**.

Dette krever at vi har **to operasjoner**

- to vektorer kan **legges sammen**:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

- en vektor kan **ganges med et tall**:

← mengde av tall, for oss $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$$c, \mathbf{v} \mapsto c \cdot \mathbf{v}$$

dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, kalles V et **reelt** vektorrom

dersom $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kalles V et **komplekst** vektorrom

Vektorromsaksiomene

og vi krever noen **regneregler**:

I et vektorrom er alt
som det skal!

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$
- Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$
kalles **nullvektor**
- For hver vektor $\mathbf{v}$ finnes det en vektor $-\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
- $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$
- $(ab) \cdot \mathbf{v} = a \cdot (b \cdot \mathbf{v})$ for alle tall a og b og alle vektorer $\mathbf{v}$
- $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$ for alle tall a og alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$
- $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$ for alle tall a og b og alle vektorer $\mathbf{v}$

addisjon i $\mathbb{K}$

Eksempel: Vektorraum av kontinuerlige funksjoner

$$V = \mathcal{C}([0,1]) = \left\{ f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ er kontinuerlig} \end{array} \right\}$$

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\begin{aligned} f, g &\longmapsto f+g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t)+g(t) \end{aligned}$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\begin{aligned} c, f &\longmapsto c \cdot f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c \cdot f(t) \end{aligned}$$

$$1. (f+g)(t) = f(t) + g(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{=} g(t) + f(t) = (g+f)(t)$$

$$f+g = g+f.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \underline{(f+g)+h}(t) &= (f+g)(t) + h(t) \\
 &= f(t) + g(t) + h(t) \\
 &= f(t) + (g(t) + h(t)) \\
 &= f(t) + (g+h)(t) \\
 &= \underline{(f+(g+h))}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \mathbb{O} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{konstant null} \\
 t &\longmapsto \mathbb{O}
 \end{aligned}$$

$$(f+\mathbb{O})(t) = f(t) + \mathbb{O}(t) = f(t) + 0 = f(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f+\mathbb{O} = f. \quad \checkmark$$

$$4. \quad \text{gibt es } f \in V$$

$$\begin{aligned}
 -f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 t &\longmapsto -f(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f + (-f))(t) &= f(t) + (-f)(t) \\
 &= f(t) + (-f(t)) \\
 &= f(t) - f(t) \\
 &= 0 \quad \forall t \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f + (-f)$ ist konstant null

$$f + (-f) = 0 \quad \checkmark$$

$$5. (1 \cdot f)(t) = 1 \cdot f(t) = f(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$1 \cdot f = f \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 6. (a \cdot b) \cdot f(t) &= (a \cdot b) \cdot f(t) \\
 &= a \cdot (b \cdot f(t)) \\
 &= (a \cdot (b \cdot f))(t) \quad \forall t
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot f = a \cdot (b \cdot f) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 7. (a \cdot (f+g))(t) &= a \cdot (f(t) + g(t)) \\
 &= a \cdot f(t) + a \cdot g(t) \\
 &= (a \cdot f)(t) + (a \cdot g)(t) \quad \neq t
 \end{aligned}$$

$$a \cdot (f+g) = a \cdot f + a \cdot g \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 8. \underline{(a+b) \cdot f}(t) &= (a+b) \cdot f(t) \\
 &= a \cdot f(t) + b \cdot f(t) \\
 &= \underline{(a \cdot f)(t) + (b \cdot f)(t)} \quad \neq t
 \end{aligned}$$

$$(a+b) \cdot f = a \cdot f + b \cdot f \quad \checkmark$$

Matematikk 3

Vektorrom - Konsekvenser av aksiomene

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

to påstander

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

Er det da ikke åpenbart?

- For å løse $x + 3 = 1$ setter vi $x = 1 + (-3) = -2$.
- For å løse $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ setter vi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Men e.g. matriseligningen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ har ingen løsning!

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

to påstander!

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

● Vi setter $x = u + (-v)$: $x + v = (u + (-v)) + v = u + (v + (-v)) = u + 0 = u$

det er en aksiom
at den finnes!

vi setter inner

vi bruker aksiomer

Aksiom: For hver vektor v finnes det en vektor $-v$ slik at $v + (-v) = 0$.

Aksiom: $(u + v) + w = u + (v + w)$ for alle vektorer u, v og w .

Aksiom: $u + v = v + u$ for alle vektorer u og v .

Aksiom: Det finnes en vektor 0 slik at $u + 0 = u$ for alle vektorer.

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

to påstander!

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

• Vi setter $x = u + (-v)$: $x + v = (u + (-v)) + v = u + (v + (-v)) = u + 0 = u$

vi setter inner $y + v = u$

• Og hvis $y + v = u$: $y = y + 0 = y + (v + (-v)) = u + (-v) = x$

vi bruker aksiomer

det viser at x er unik

Aksiom: Det finnes en vektor 0 slik at $u + 0 = u$ for alle vektorer.

Aksiom: For hver vektor v finnes det en vektor $-v$ slik at $v + (-v) = 0$.

Aksiom: $(u + v) + w = u + (v + w)$ for alle vektorer u, v og w .

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst



Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

- Nullvektoren 0 er unik i V .

→ $x + v = v$ har den unike løsningen $x = 0$ for alle vektorer v .

- For alle vektorer v er $-v$ unik i V .

→ $x + v = 0$ har den unike løsningen $x = -v$.

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

- For alle vektorer v har vi $0 \cdot v = 0$.

→ $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ men også $0 + 0 \cdot v = 0 \cdot v$

- For alle tall a har vi $a \cdot 0 = 0$.

→ $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ men også $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$

Ting som gjelder i alle vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

Lemma: La u, v være vektorer i V . Da eksisterer i V en unik vektor x med $x + v = u$.

- For alle vektorer v har vi $(-1) \cdot v = -v$.

→ $0 = (1 + (-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v$ fordi $-v$ også er en løsning

altså er $x = (-1) \cdot v$ en løsning til $x + v = 0$

- Hvis $a \cdot v = 0$, så må vi har enten $a = 0$ eller $v = 0$.

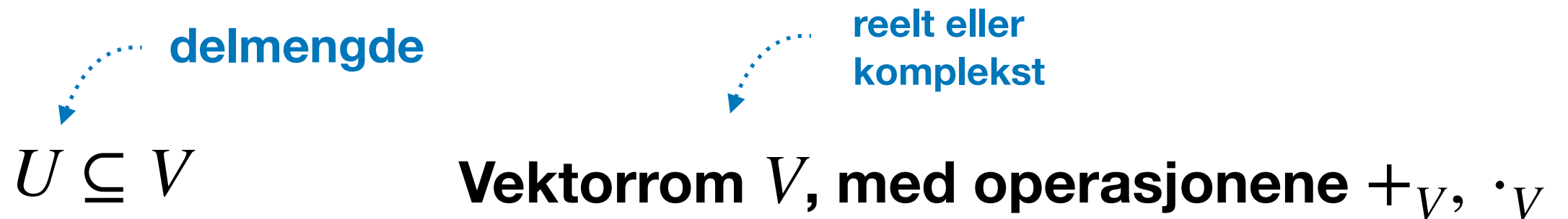
→ anta $a \neq 0$, da finnes tallet a^{-1} med $a^{-1}a = 1$

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Matematikk 3

Vektorrom - Underrom

Underrom



det er ordet vi definerer

- En delmengde U kalles et **underrom** av V , dersom U **utgjør et vektorrom** med **samme operasjonene** $+_V, \cdot_V$ som i V .

det er viktig!

begrenset til U

To enkle eksempler:

- $U = V$

- $U = \{\mathbf{0}\}$

“nullrommet”

kun ét element!

Underrom

- En delmengde U kalles et **underrom** av V , dersom U **utgjør et vektorrom** med samme operasjonene $+_V$, $\cdot_V$ som i V .

vektorrom

Teorem: En delmengde $U \subseteq V$ er et **underrom** hvis og bare hvis

dvs nullvektoren i V

- **nullvektoren** ligger i U

U er lukket under addisjon

- for alle $u, v \in U$ ligger også $u +_V v$ i U

U er lukket under skalar-multiplikasjon

- for alle $u \in U$ og alle tall a ligger også $a \cdot_V u$ i U .

reelle eller komplekse

😎 Vi slipper å sjekke alle åtte aksiomene ... 😎

Eksempler: Lineære spennet

$$= \{c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots : c_i \in \mathbb{K}\}$$

- $U = \text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$, det lineære spennet av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ i V , er **alltid et underrom** av V .
- $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots \in U$ ✓
- $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U$ dvs $\mathbf{u} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$, $\mathbf{w} = d_1 \cdot \mathbf{v}_1 + d_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$
 $\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{w} = (c_1 + d_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$
 $\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{w} \in U$ ✓
- $a \in \mathbb{K}, \mathbf{u} \in U$ dvs $\mathbf{u} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$
 $\Rightarrow a \cdot_V \mathbf{u} = (ac_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (ac_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$
 $\Rightarrow a \cdot_V \mathbf{u} \in U$ ✓

Eksempler: Col og Row

La A være en kompleks $m \times n$ -matrise.

 kalles kolonnerommet til A

- Da er $U = \text{Col } A =$ rommet utspent av kolonnene i A
et underrom av $\mathbb{C}^m$.

Vi kan også skrive $\text{Col } A = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m \mid \text{det finnes } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \text{ med } A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \}$.

 kalles radrommet til A

- Da er $U = \text{Row } A =$ rommet utspent av radene i A
et underrom av $\mathbb{C}^n$.

Eksempler: Nullrommet

La A være en kompleks $m \times n$ -matrise.

kalles nullrommet til A

- $U = \text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{C}^n$.

- $\mathbf{0} \in \text{Null } A$ fordi $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ✓

- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Null } A$ dvs $A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} = A \cdot \mathbf{v}$

$$\Rightarrow A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{u} + A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Null } A \quad \checkmark$$

- $a \in \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \text{Null } A \quad \Rightarrow A \cdot (a\mathbf{u}) = a \cdot (A \cdot \mathbf{u}) = a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow a \cdot \mathbf{u} \in \text{Null } A \quad \checkmark$$

Eksempler: Differensialligninger

$$V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ er to ganger kontinuerlig deriverbar}\}$$

 mengden vi møtte i en annen video

- Da er $U = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : f'' + f = 0\} \subseteq V$ **et underrom av V .**

- 0 = funksjonen som er konstant null, ligger i U ✓

- $f, g \in U$ dvs $f'' + f = 0$ og $g'' + g = 0$

$$\Rightarrow (f + g)'' + (f + g) = (f'' + g'') + (f + g) = (f'' + f) + (g'' + g) = 0$$

$$\Rightarrow f + g \in U \quad \checkmark$$

- $a \in \mathbb{R}$ og $f \in U$

$$\Rightarrow (a \cdot f)''(t) + (a \cdot f)(t) = af''(t) + af(t) = a(f''(t) + f(t)) = 0 \text{ for alle } t$$

$$\Rightarrow a \cdot f \in U \quad \checkmark$$

Eksempler: Differensialligninger

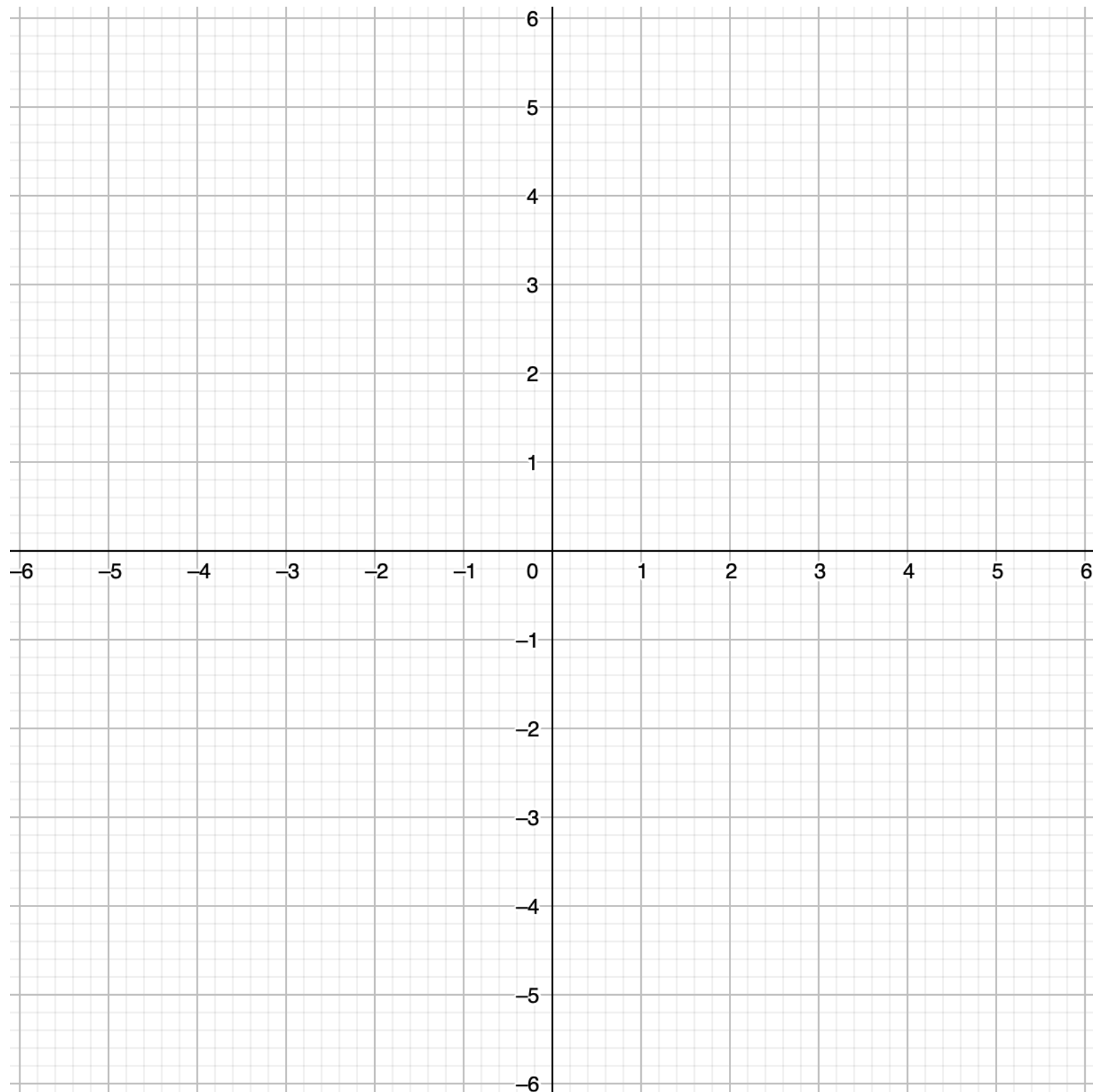
$$V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig} \}$$

- $U = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 1\} \subseteq V$ er **ikke et underrom** av V .
- $\mathbf{0}$ = funksjonen som er konstant null, ligger **ikke** i U
- $f, g \in U$ da er $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$
 $\Rightarrow f + g \notin U$

Matematikk 3

Vektorrom - Underrom i $\mathbb{R}^2$

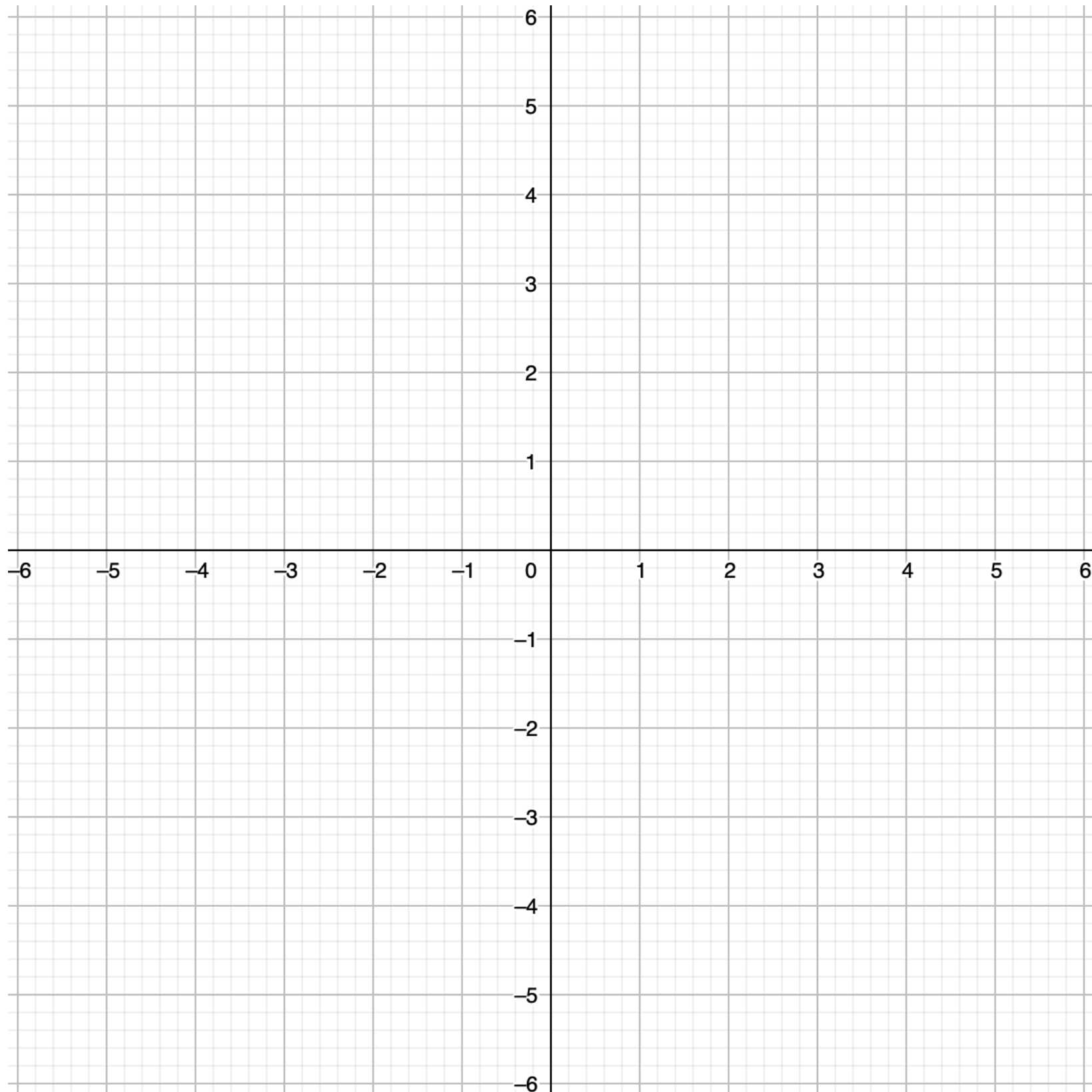
Underrom i $\mathbb{R}^2$



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

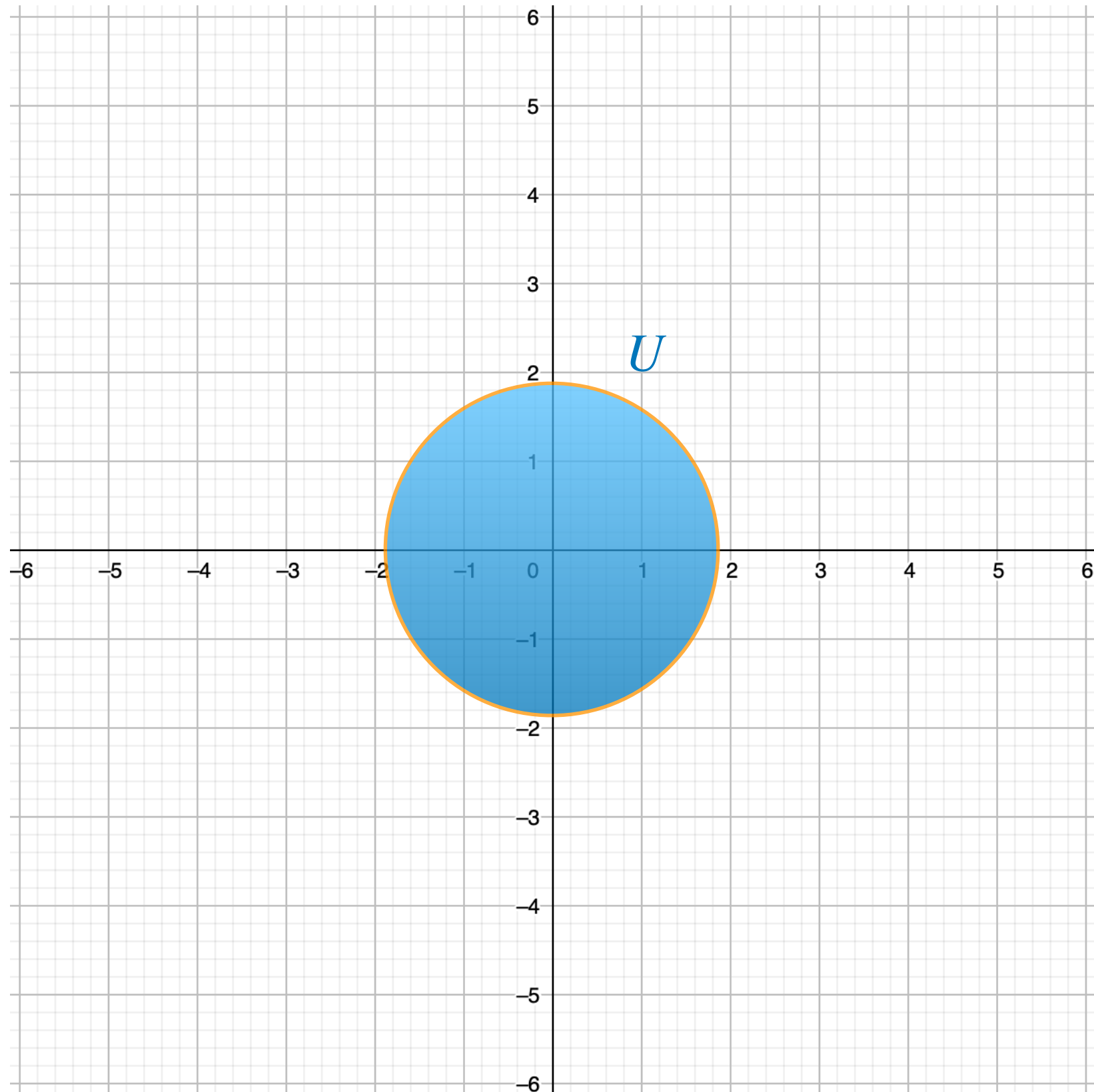
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

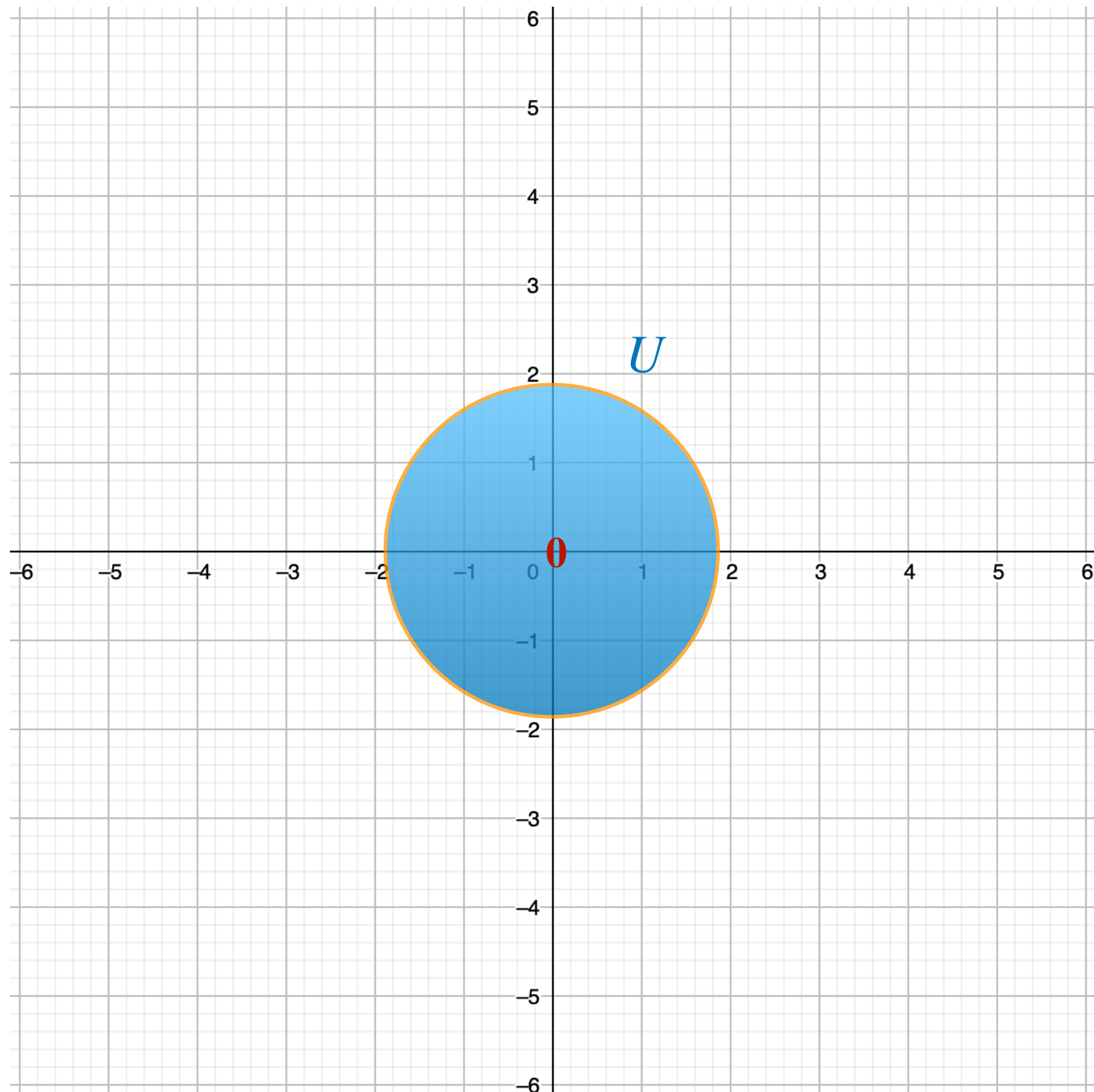
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

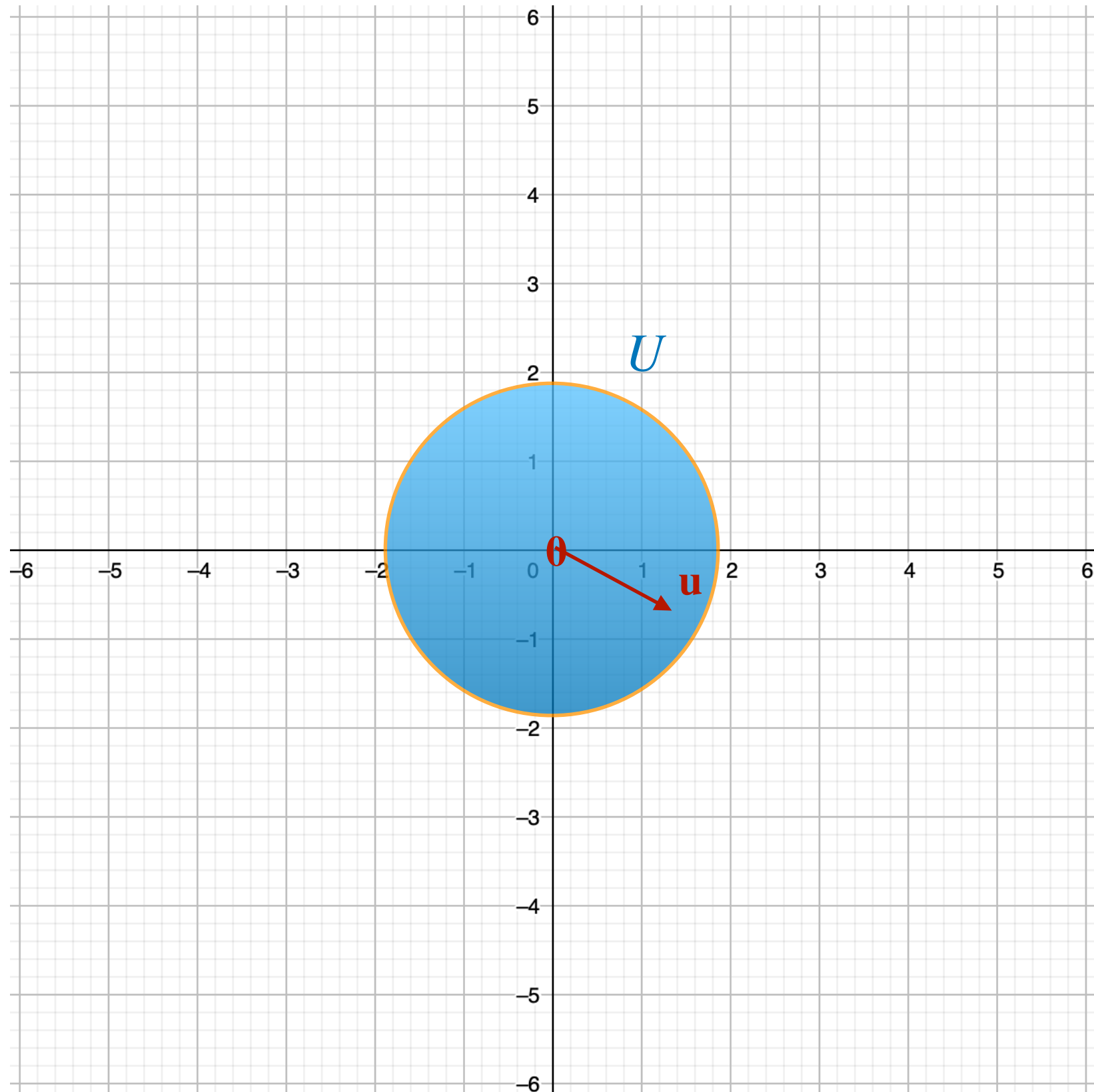
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

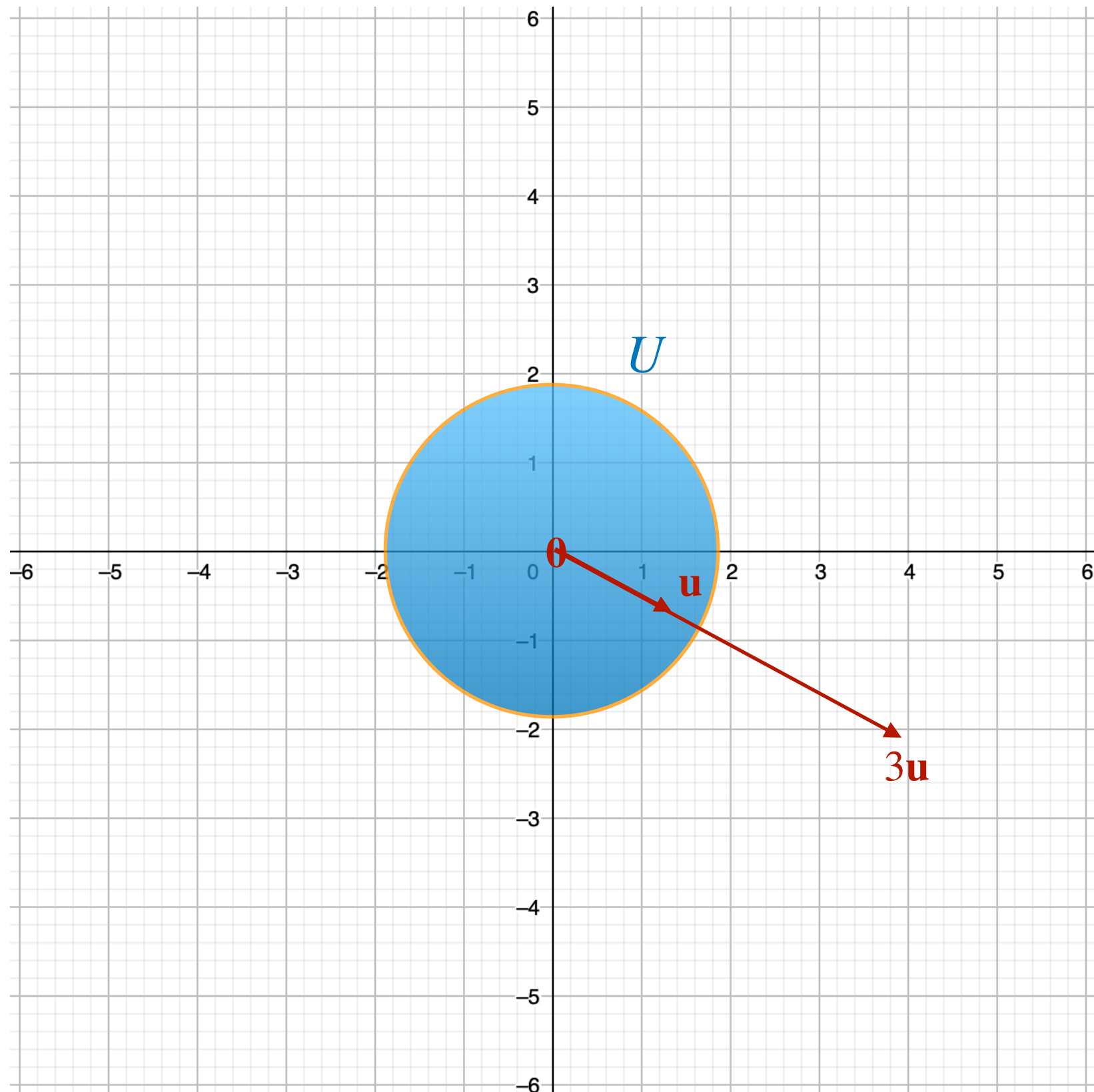
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

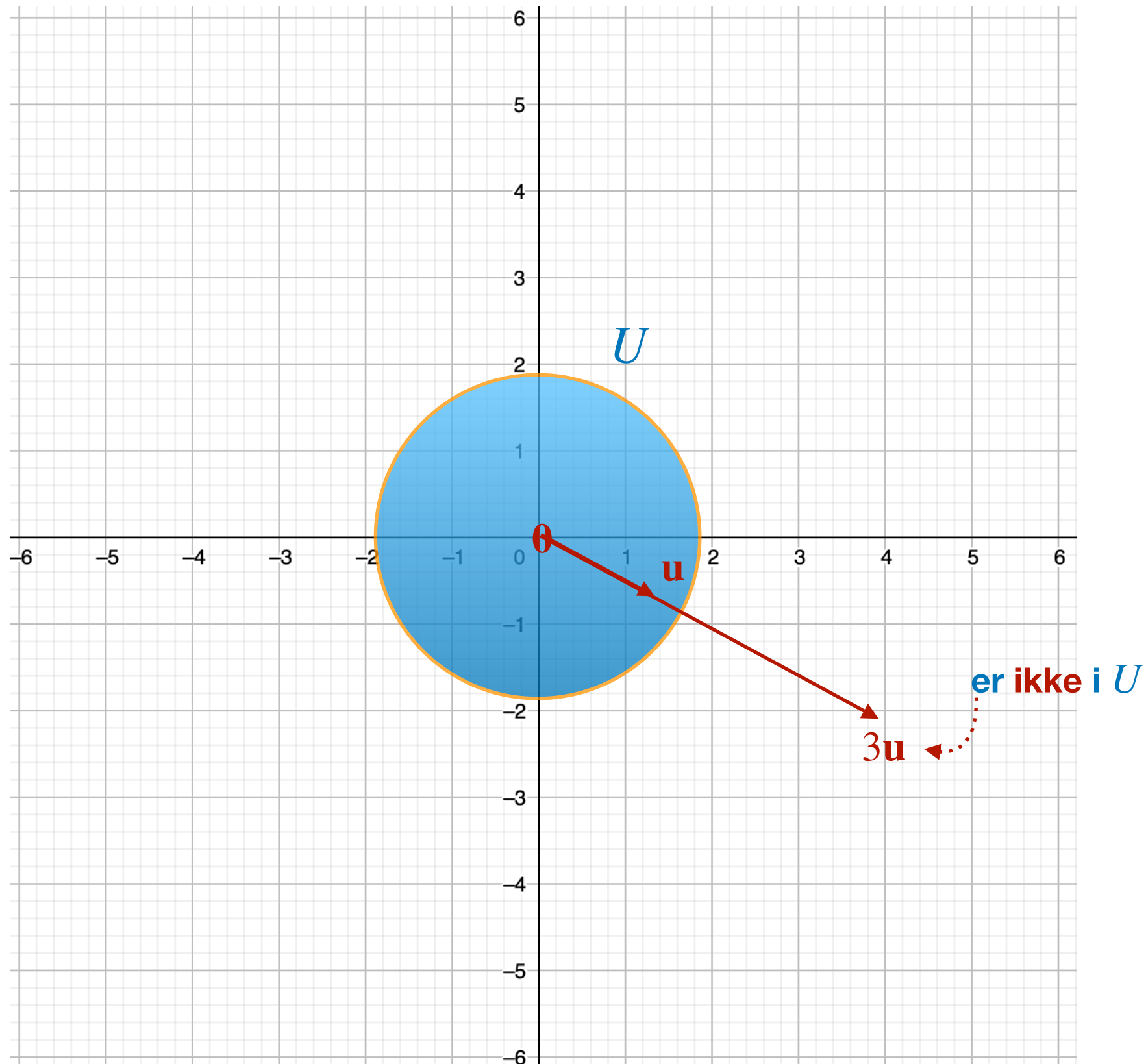
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

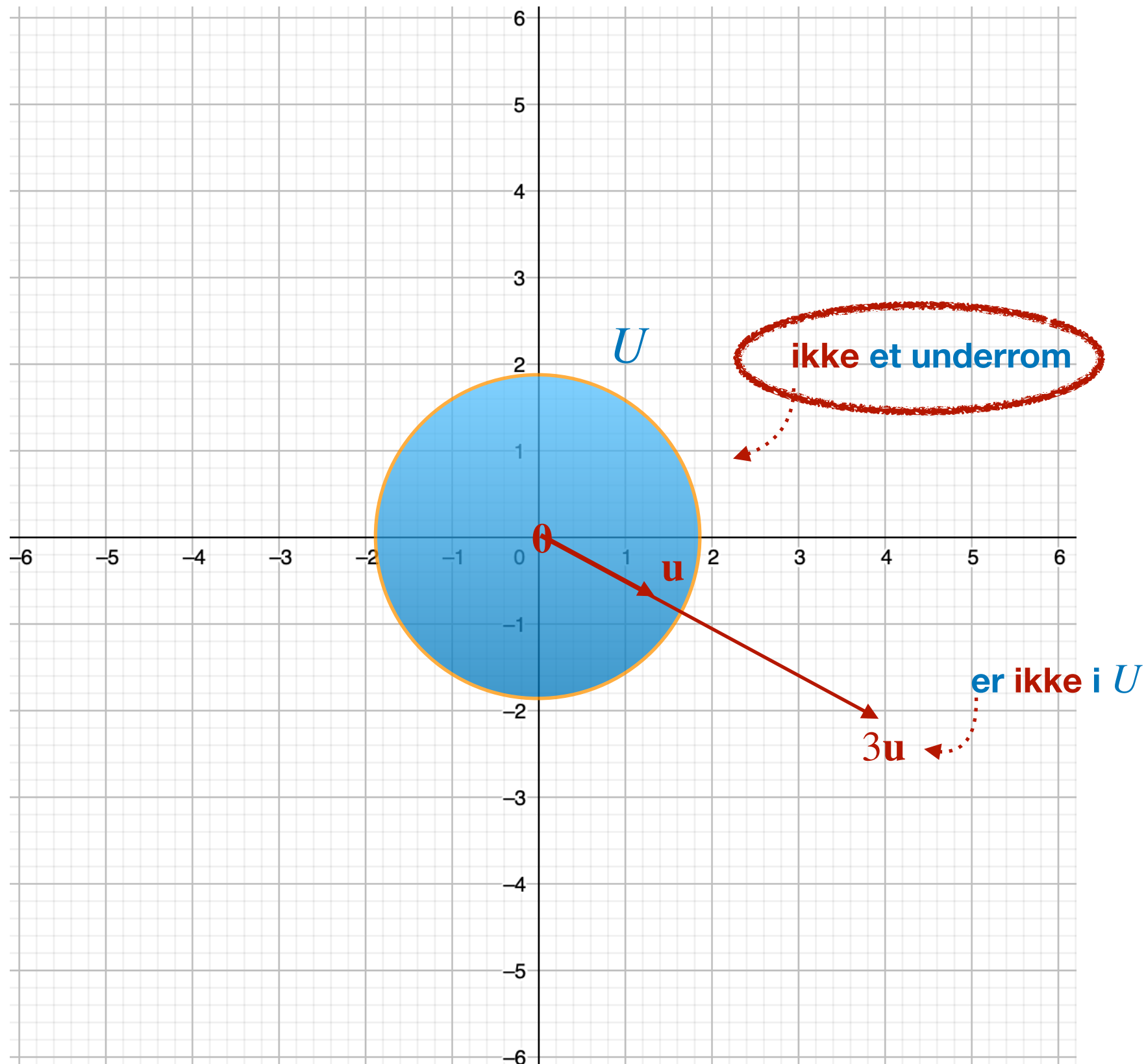
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

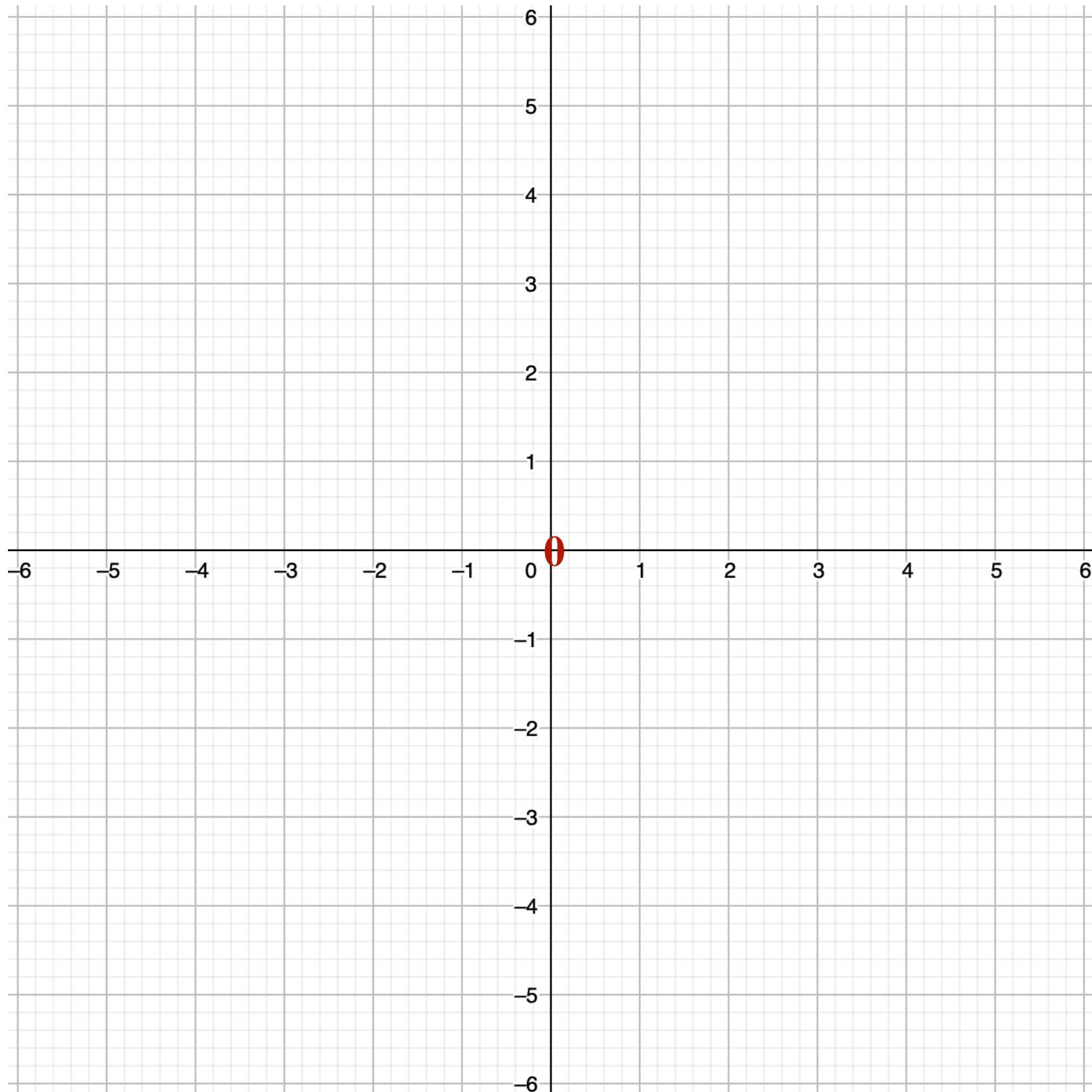
er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

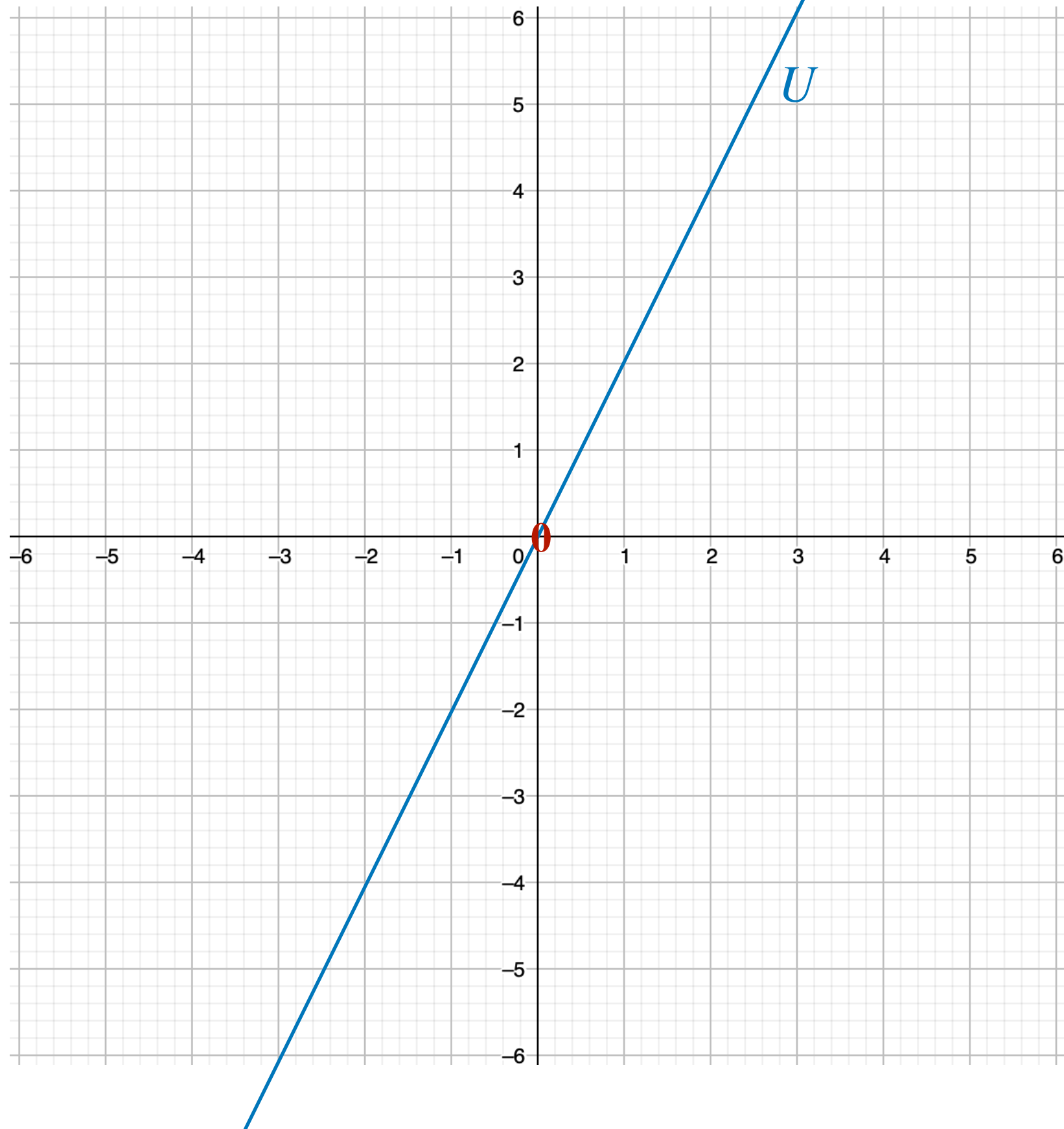
- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

er underrom



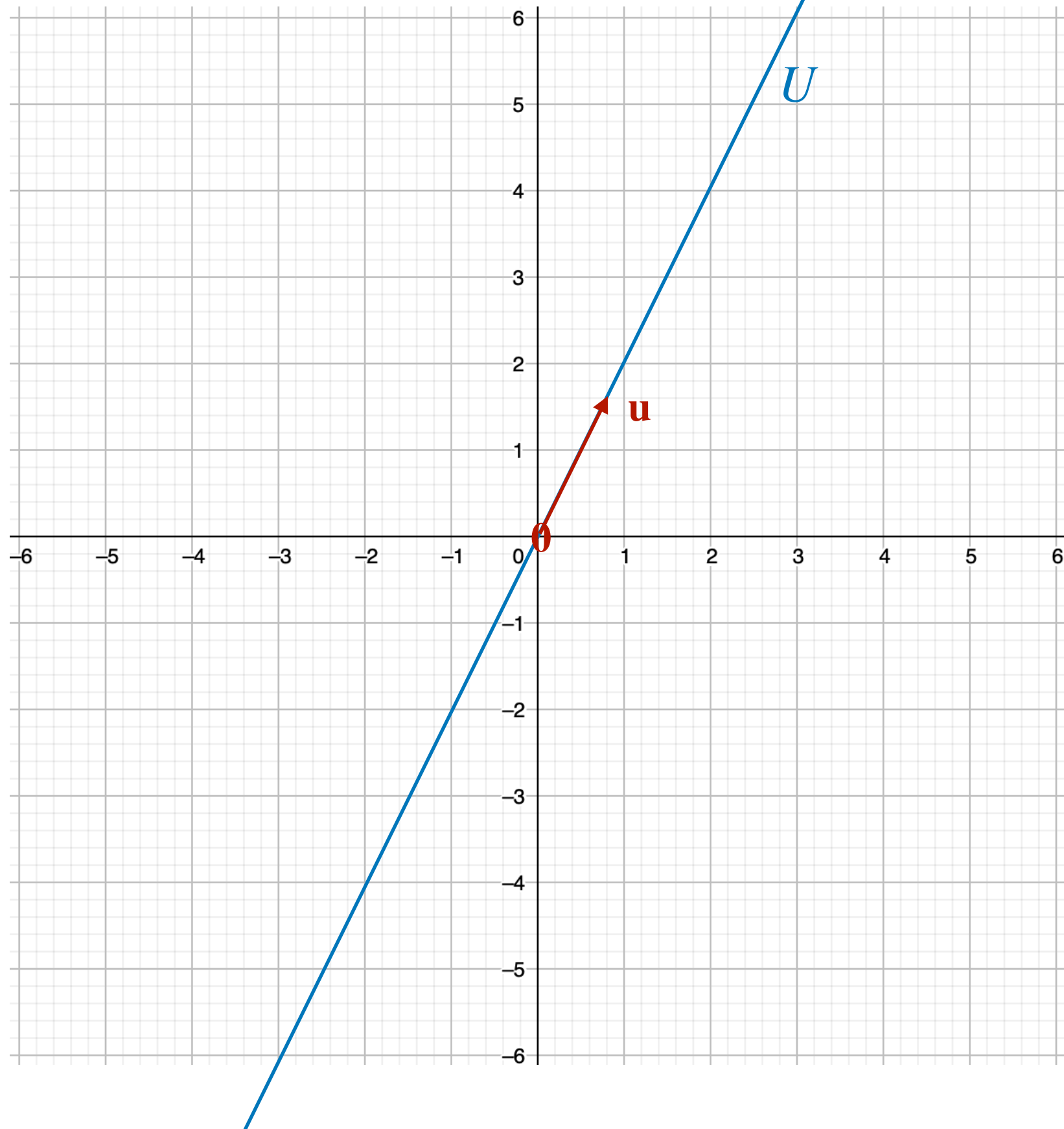
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- er underrom



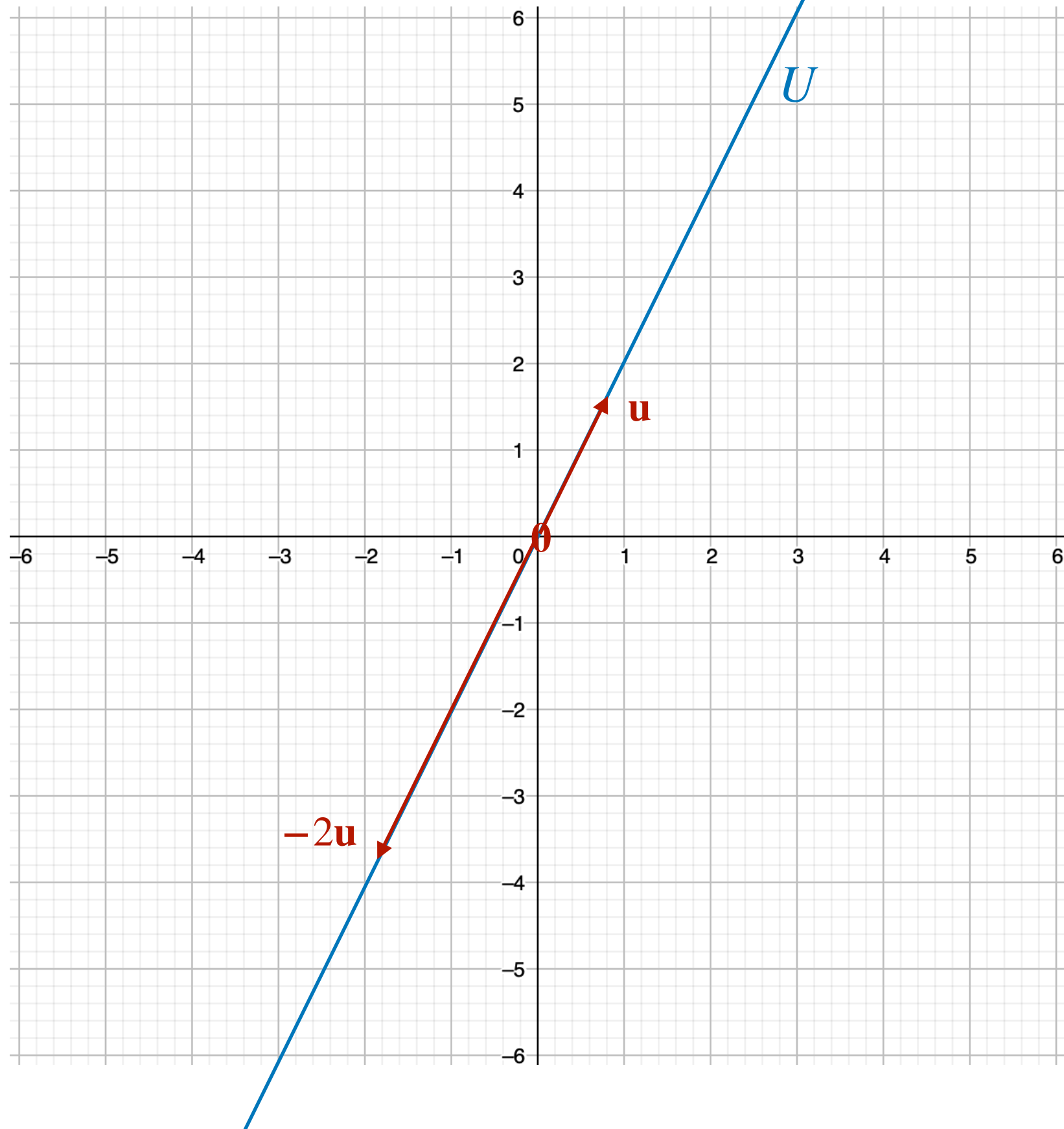
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

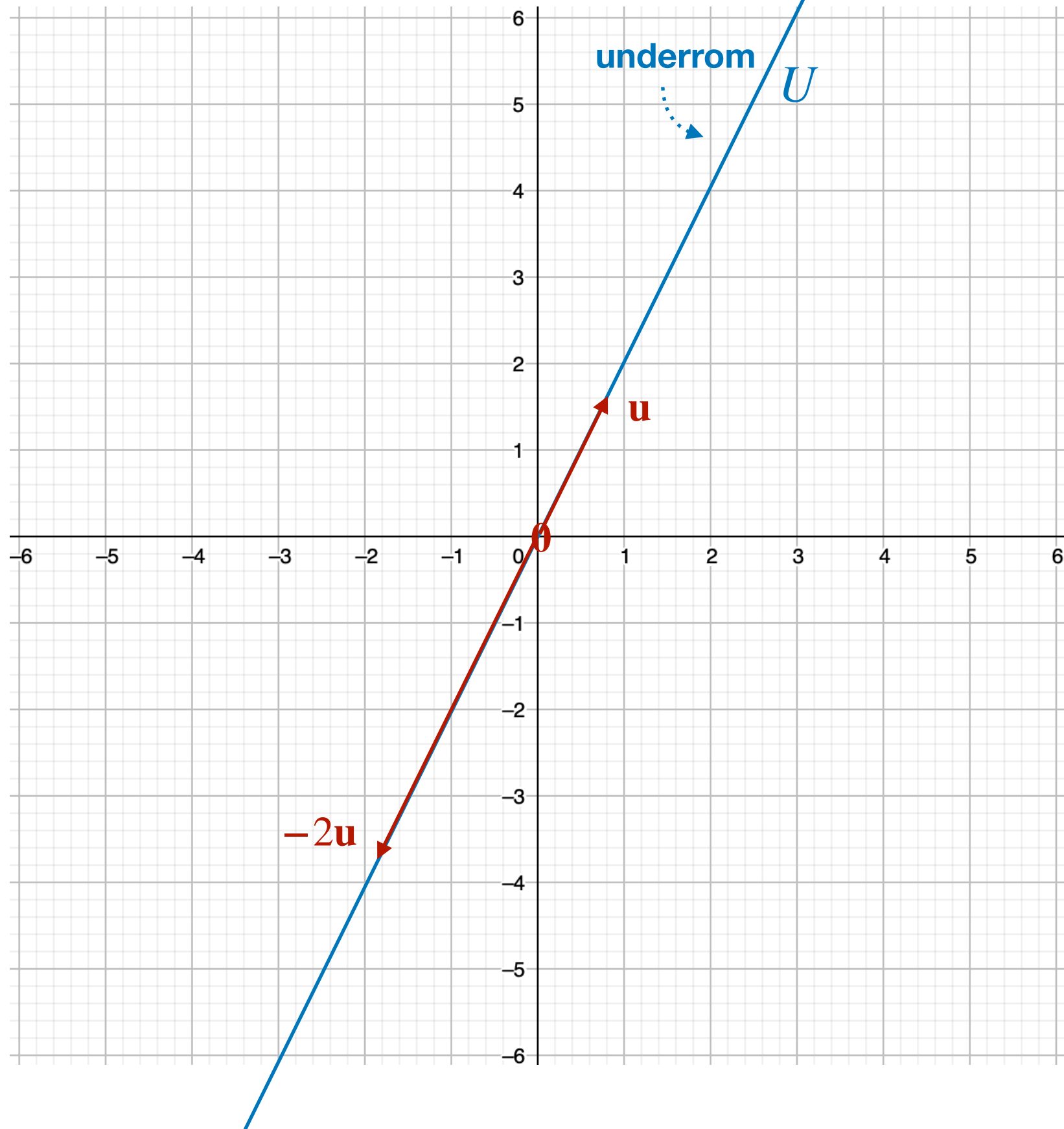
- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
- $U = \{\mathbf{0}\}$

er underrom

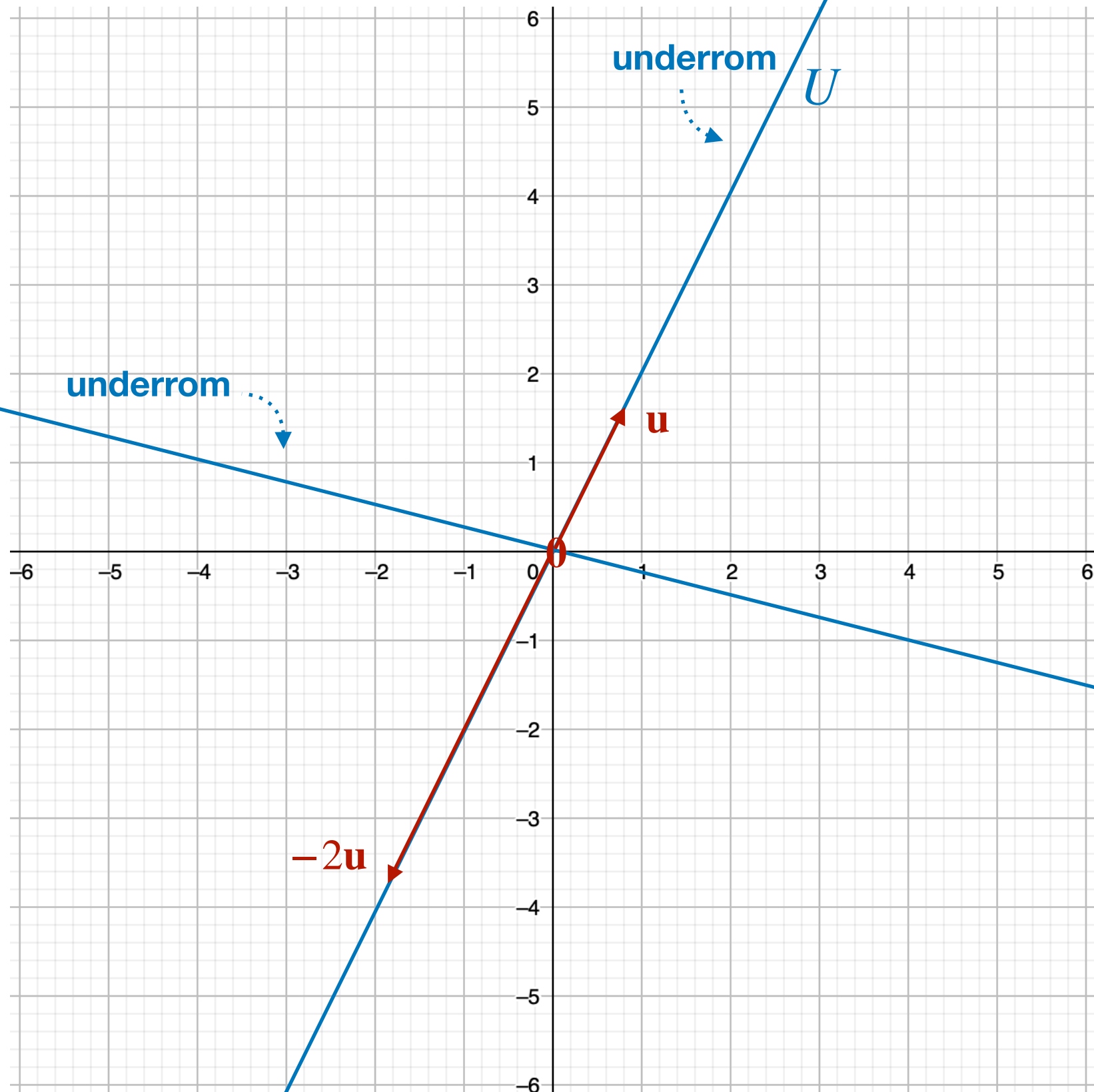


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

- $U = \{\mathbf{0}\}$

er underrom

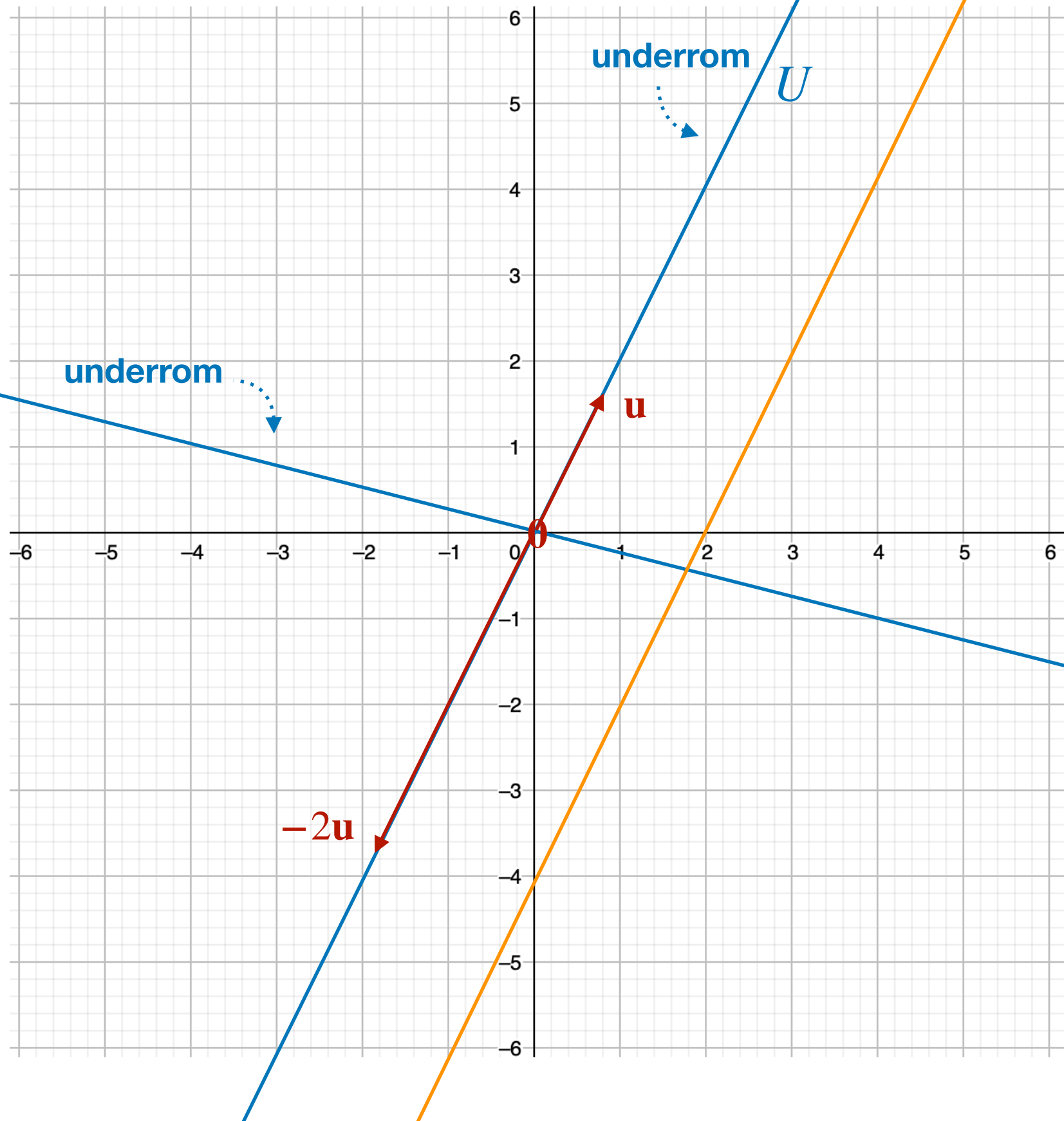


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

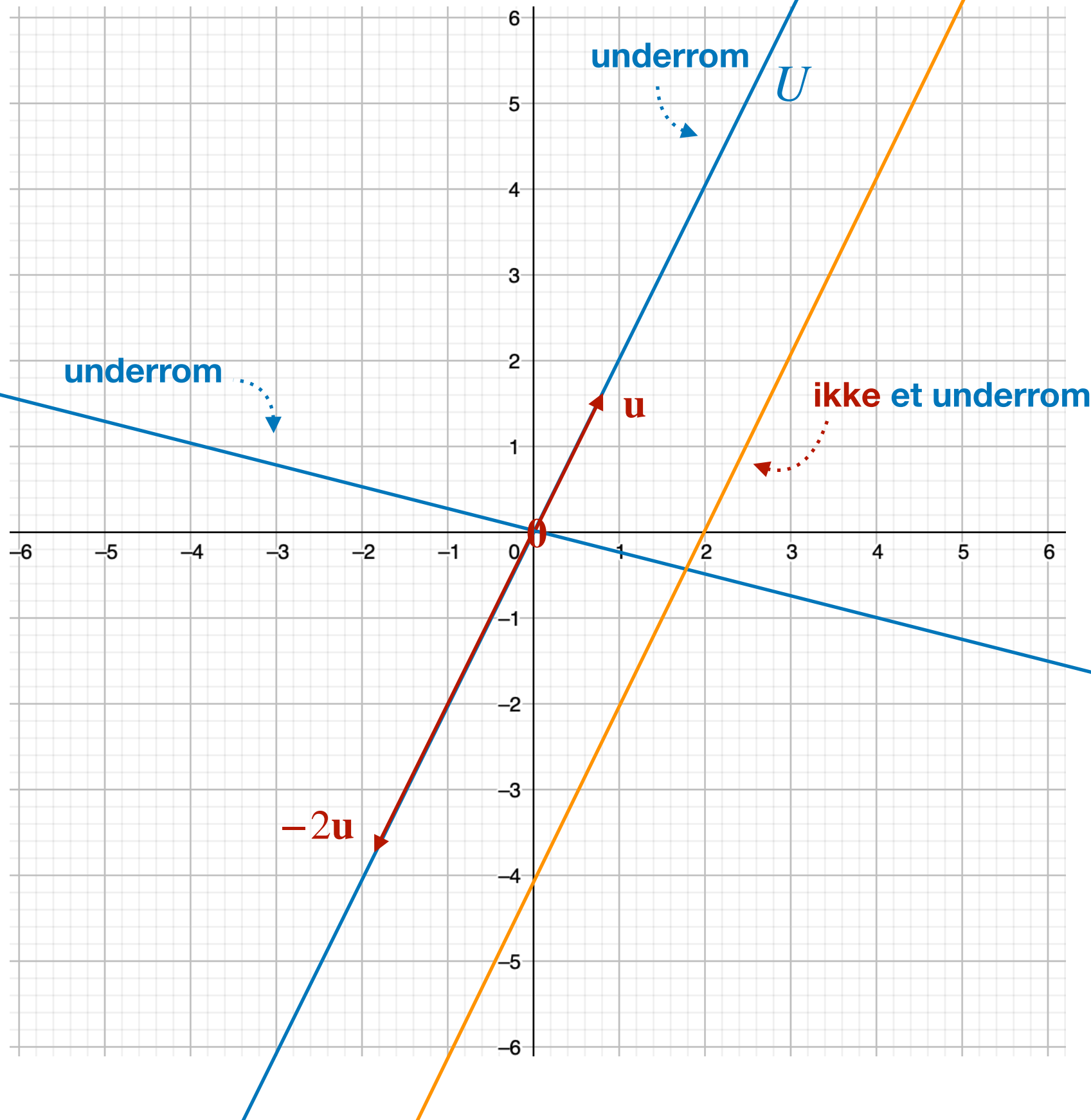
- $U = \{\mathbf{0}\}$

er underrom



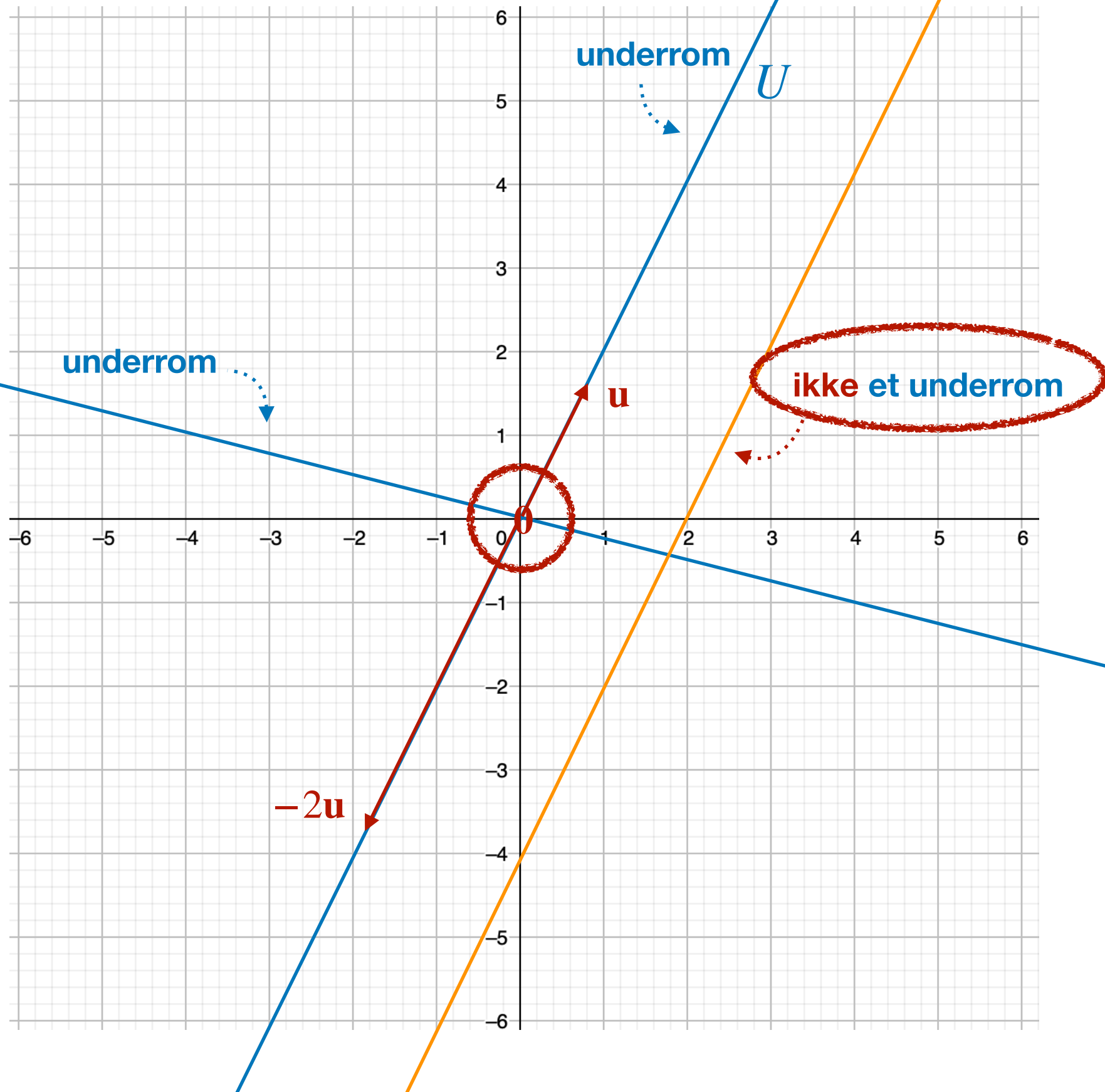
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- er underrom



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- er underrom

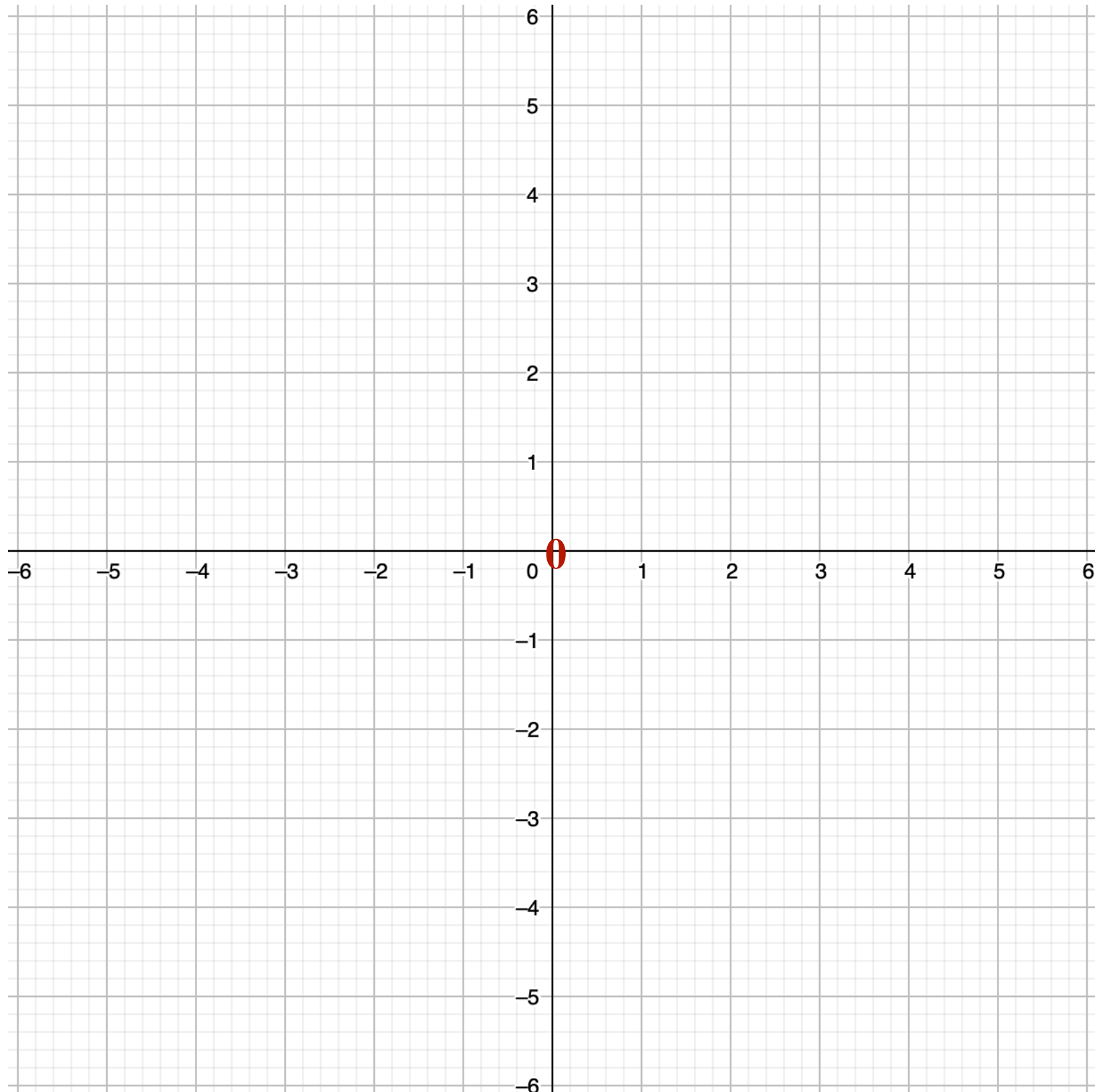


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!

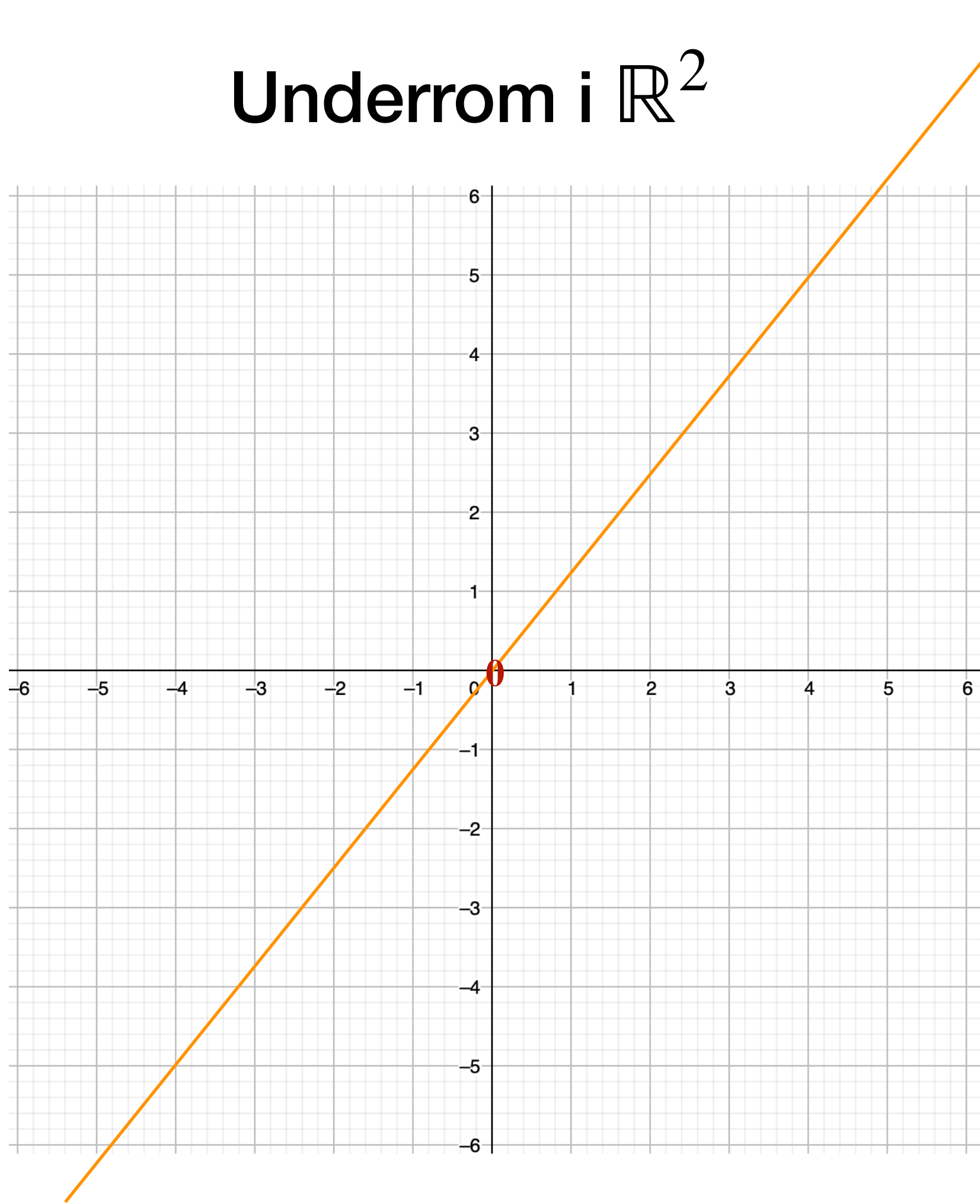


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!

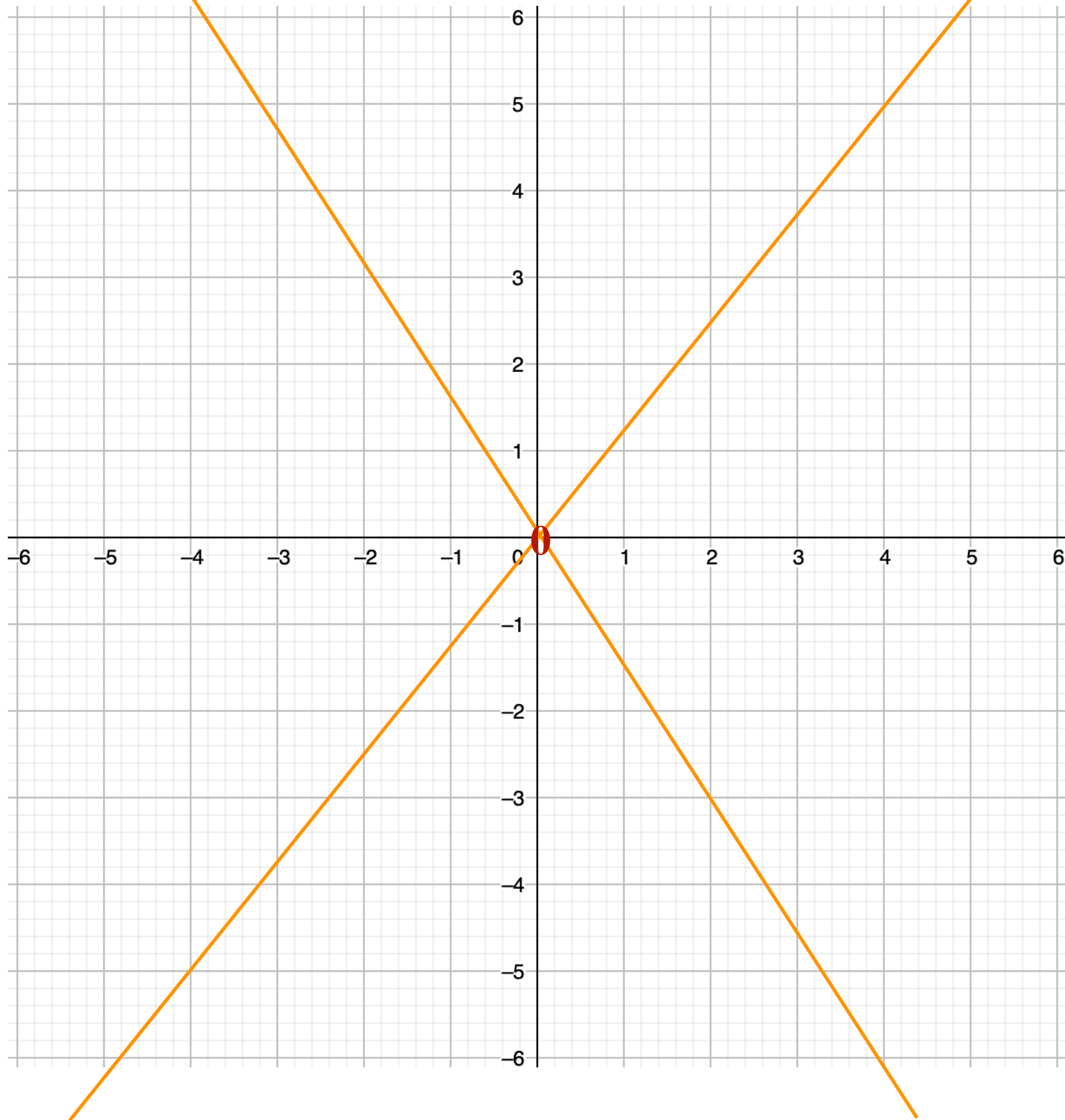


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

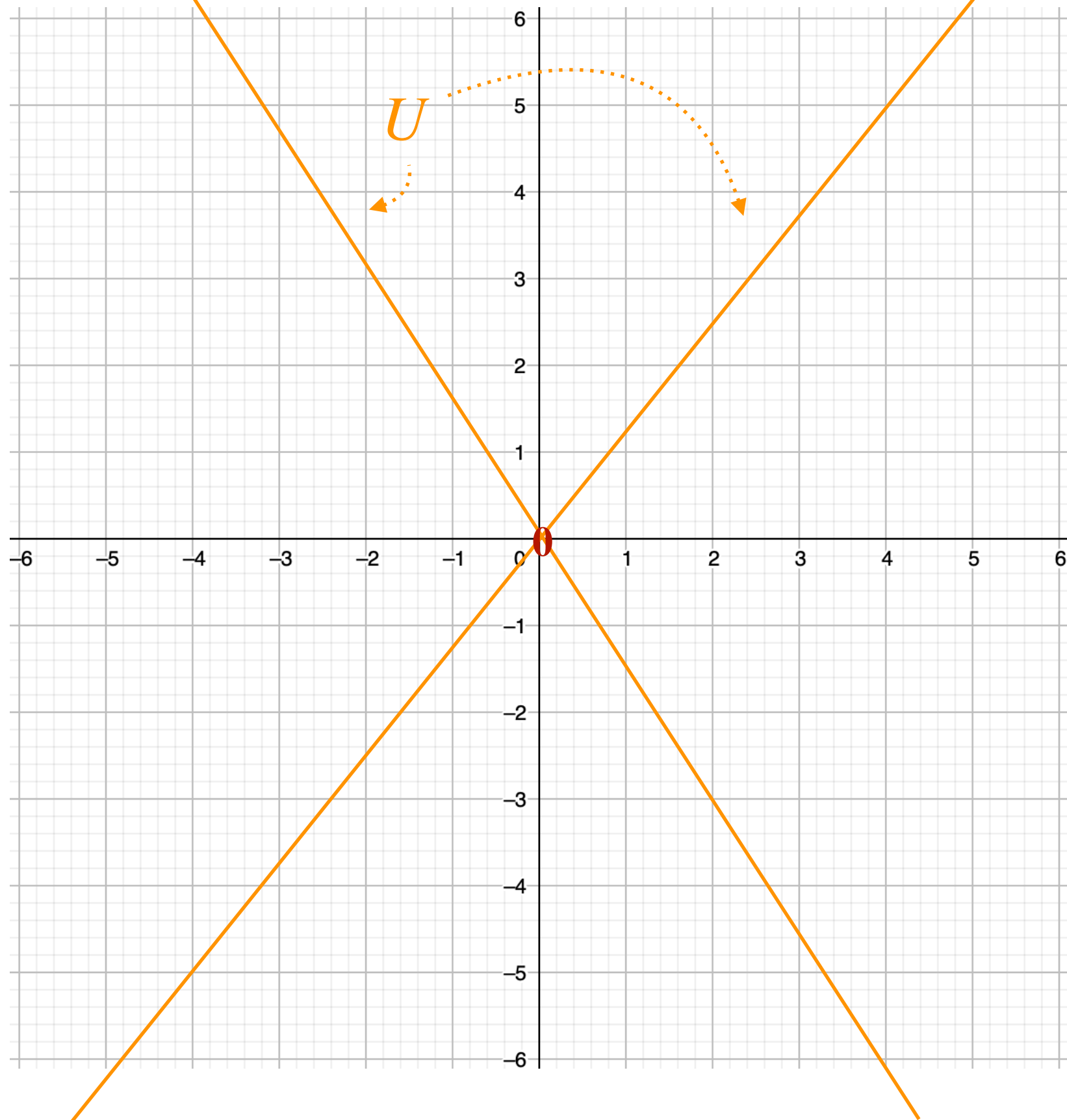
- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!

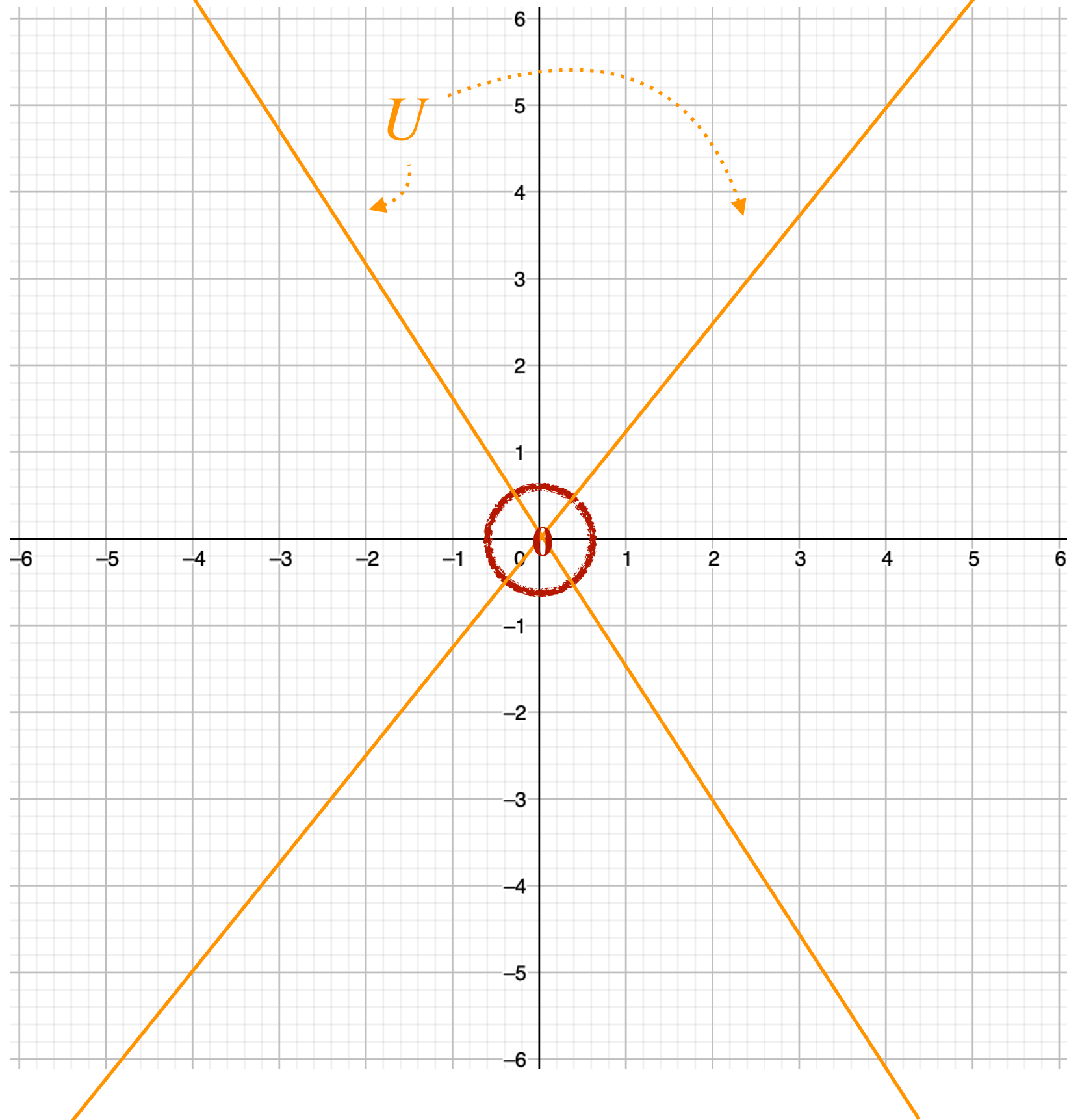


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

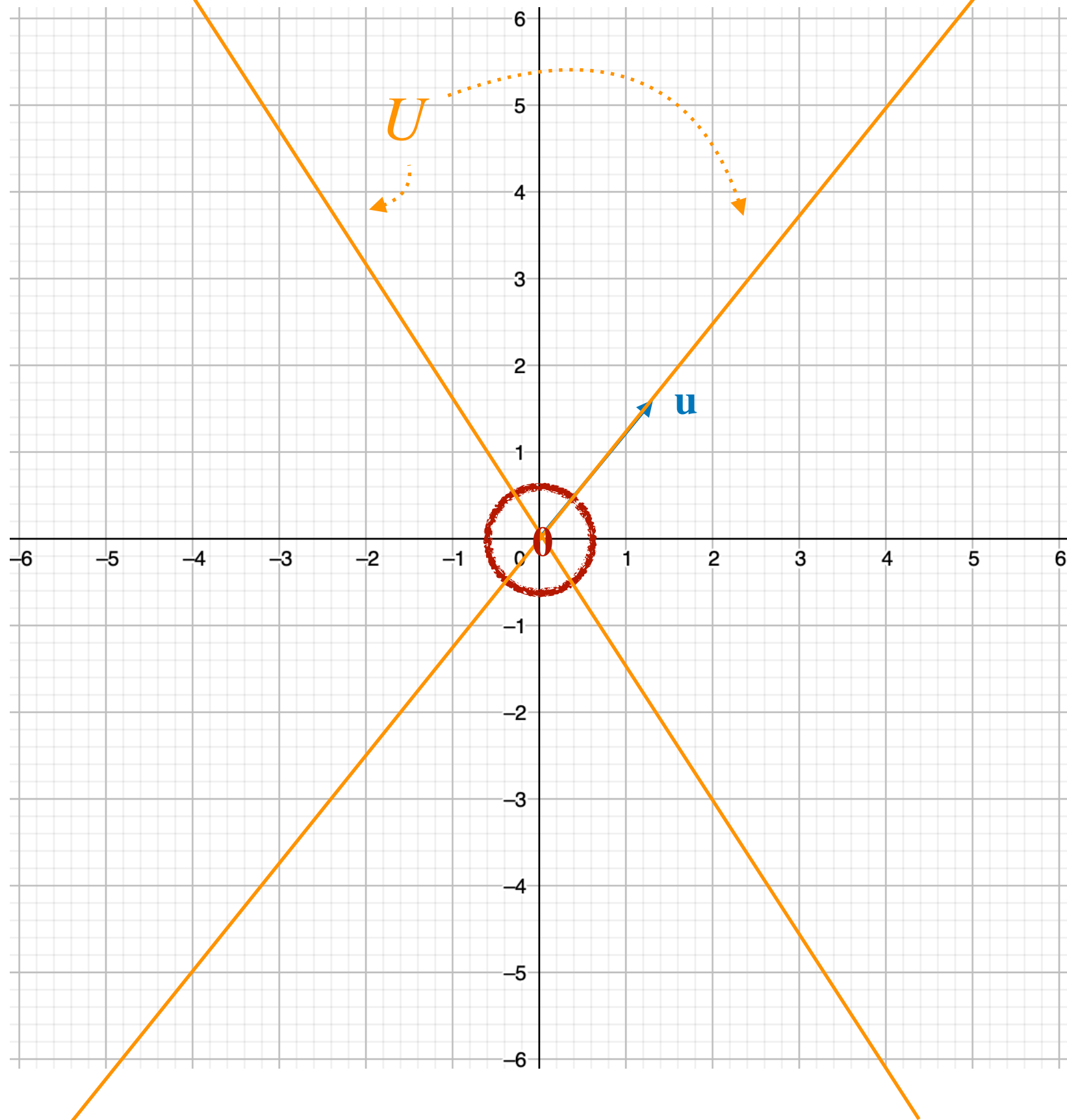
- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!



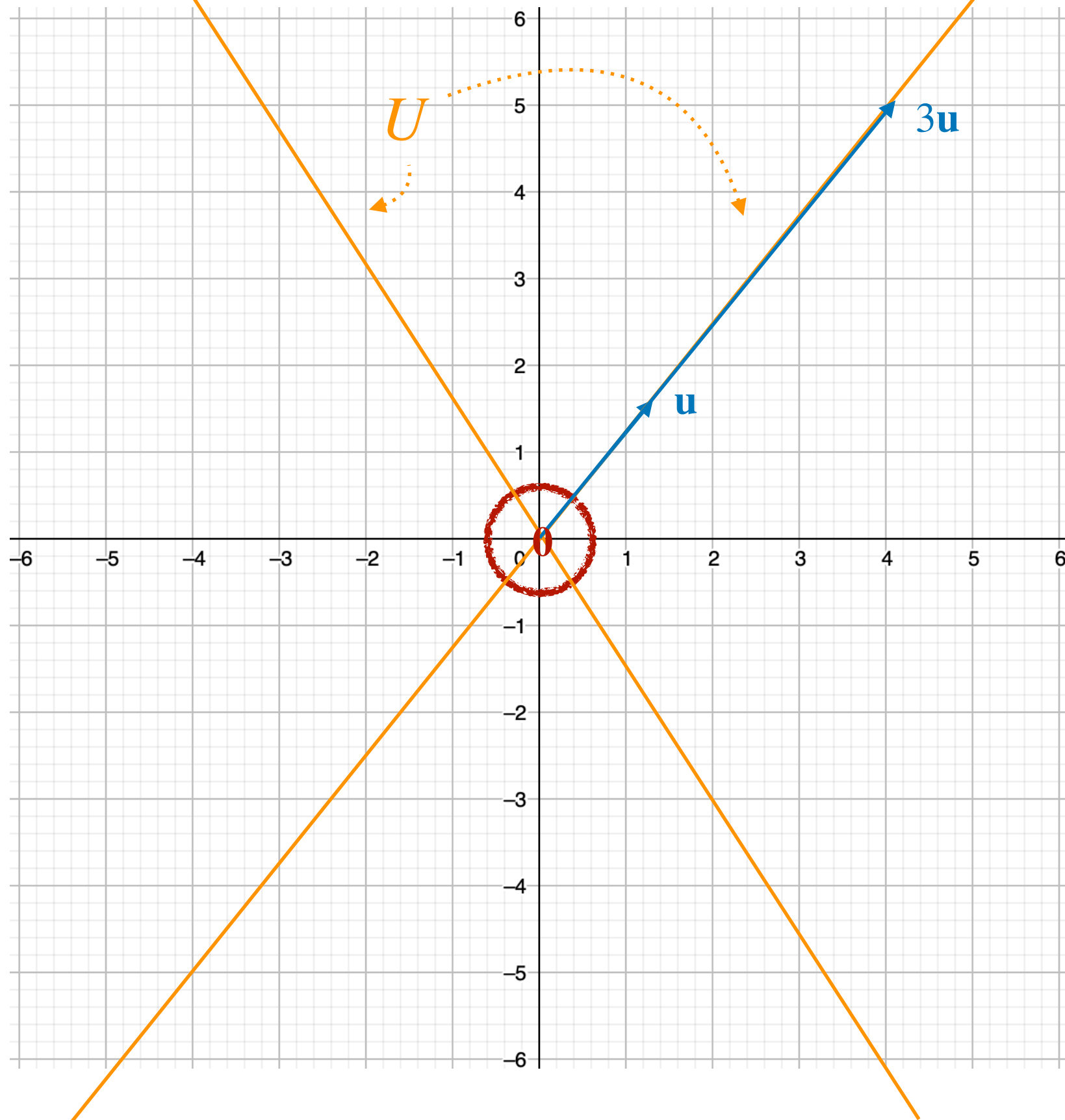
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



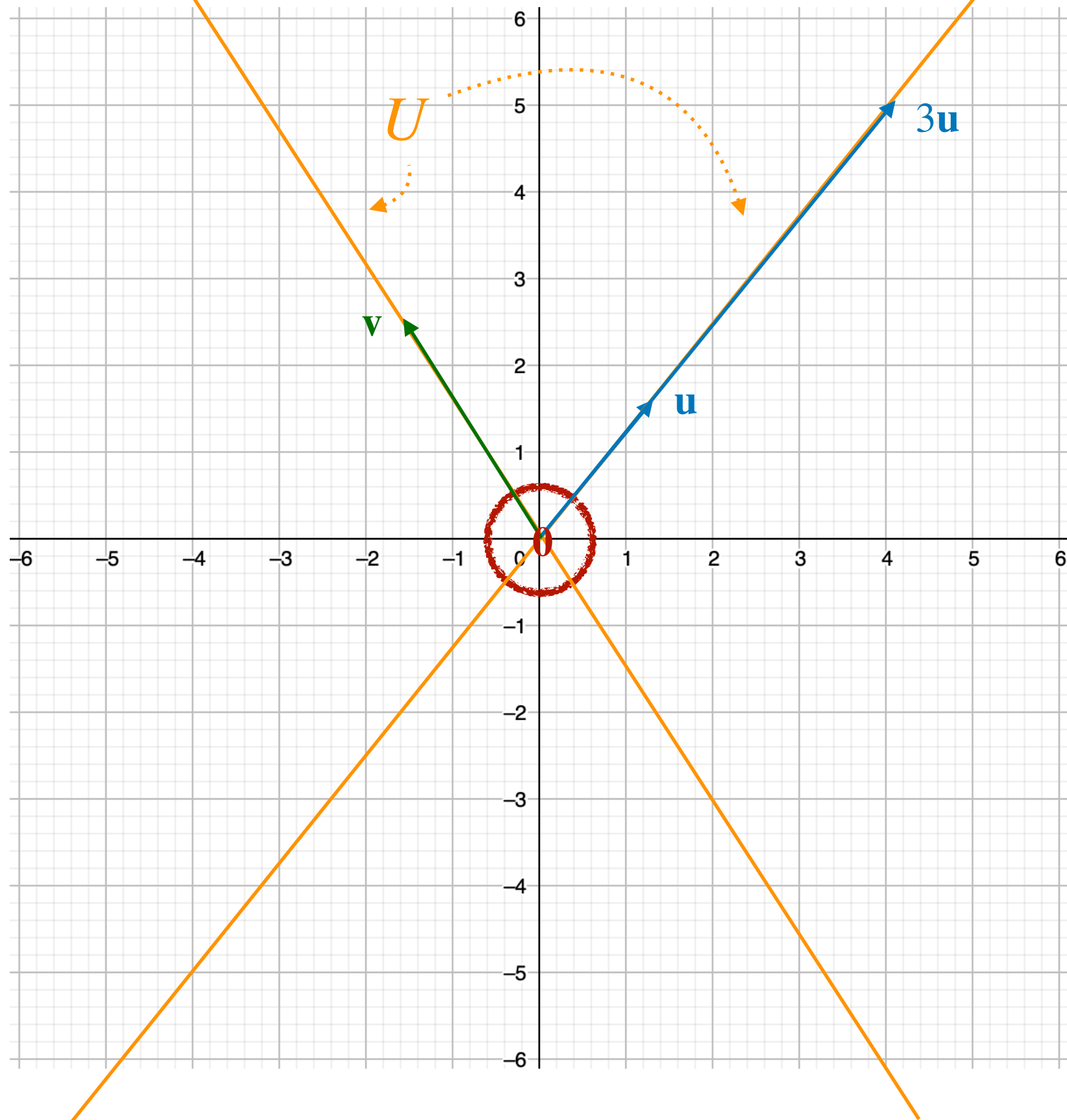
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



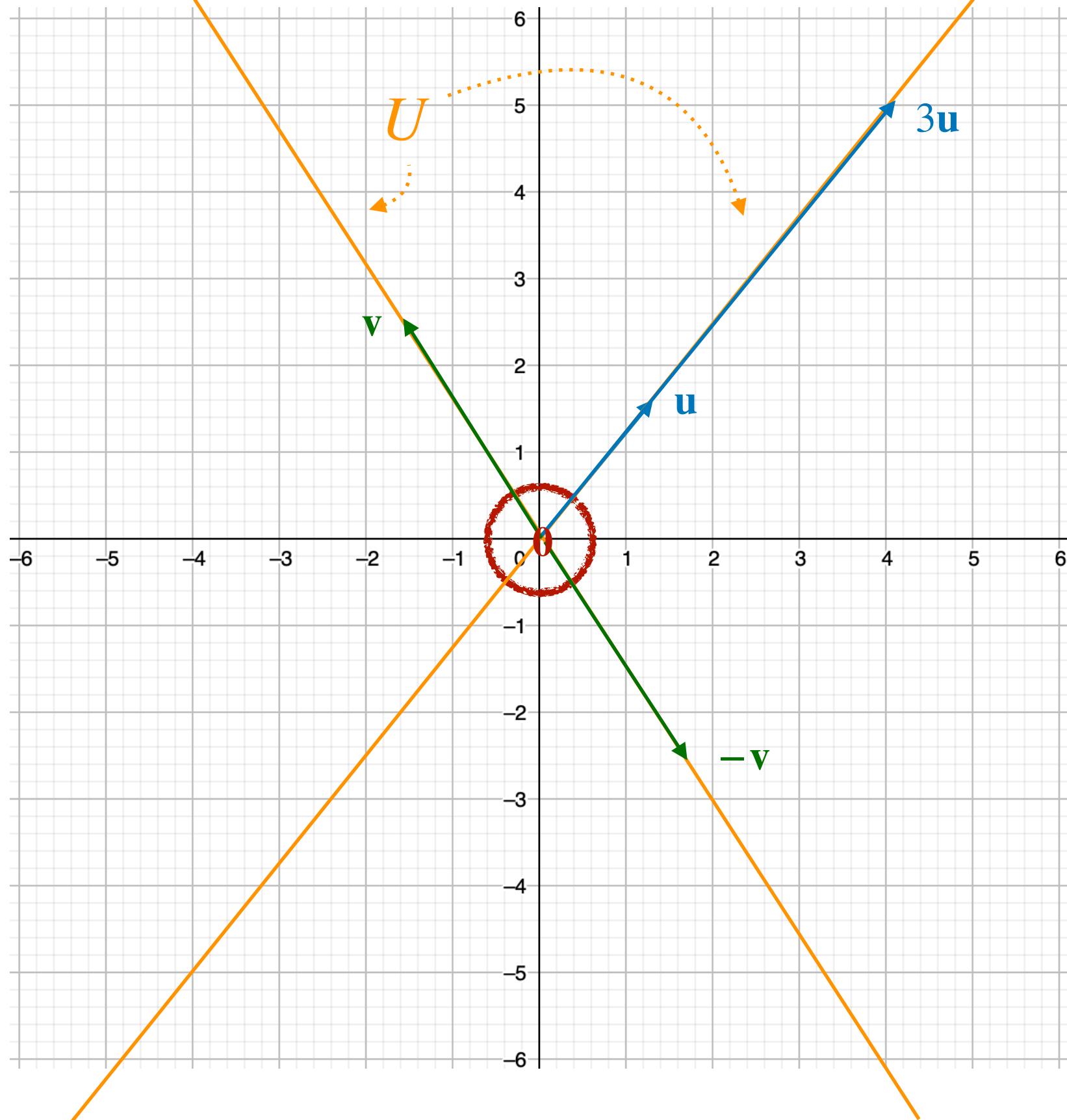
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



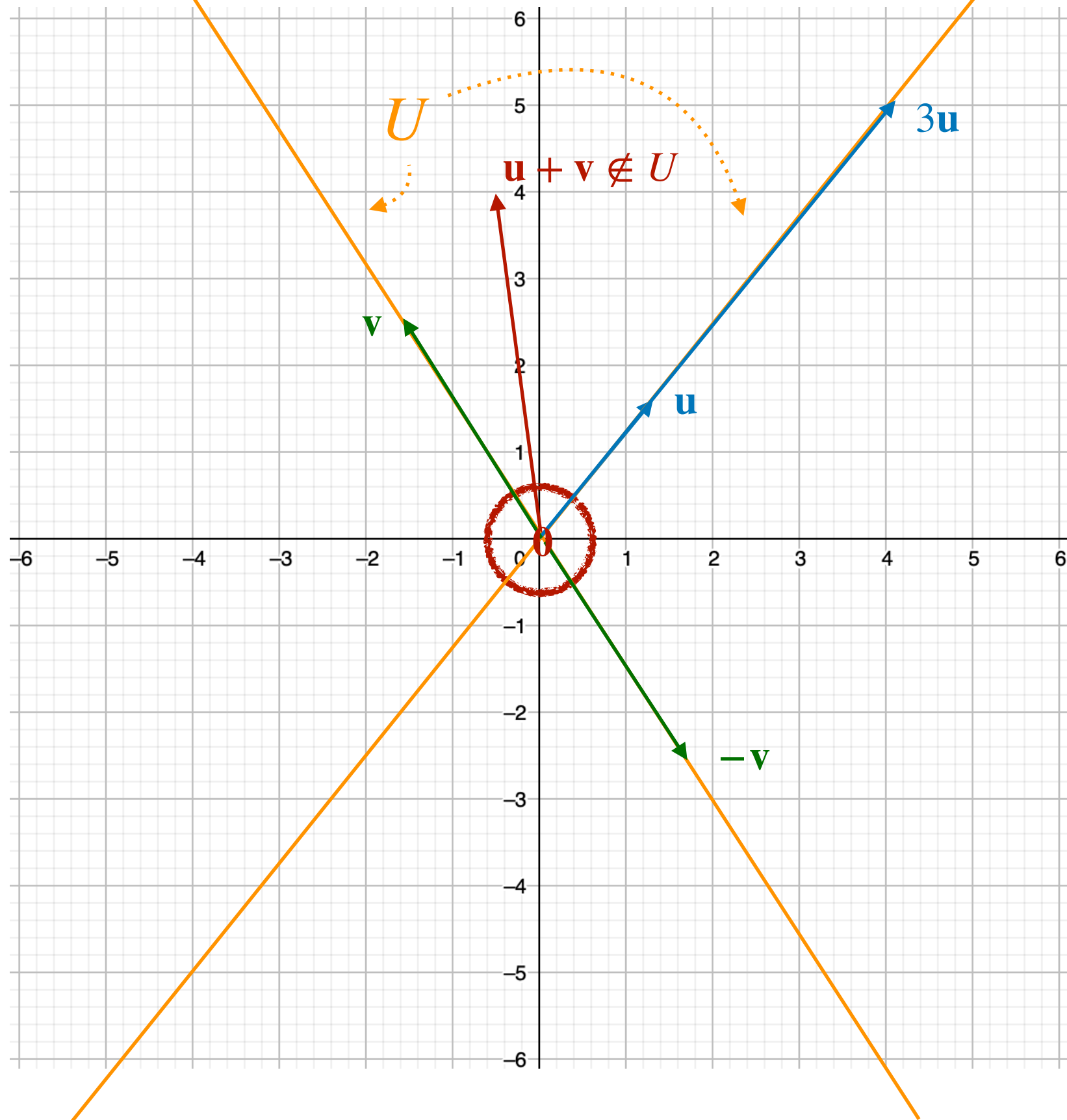
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



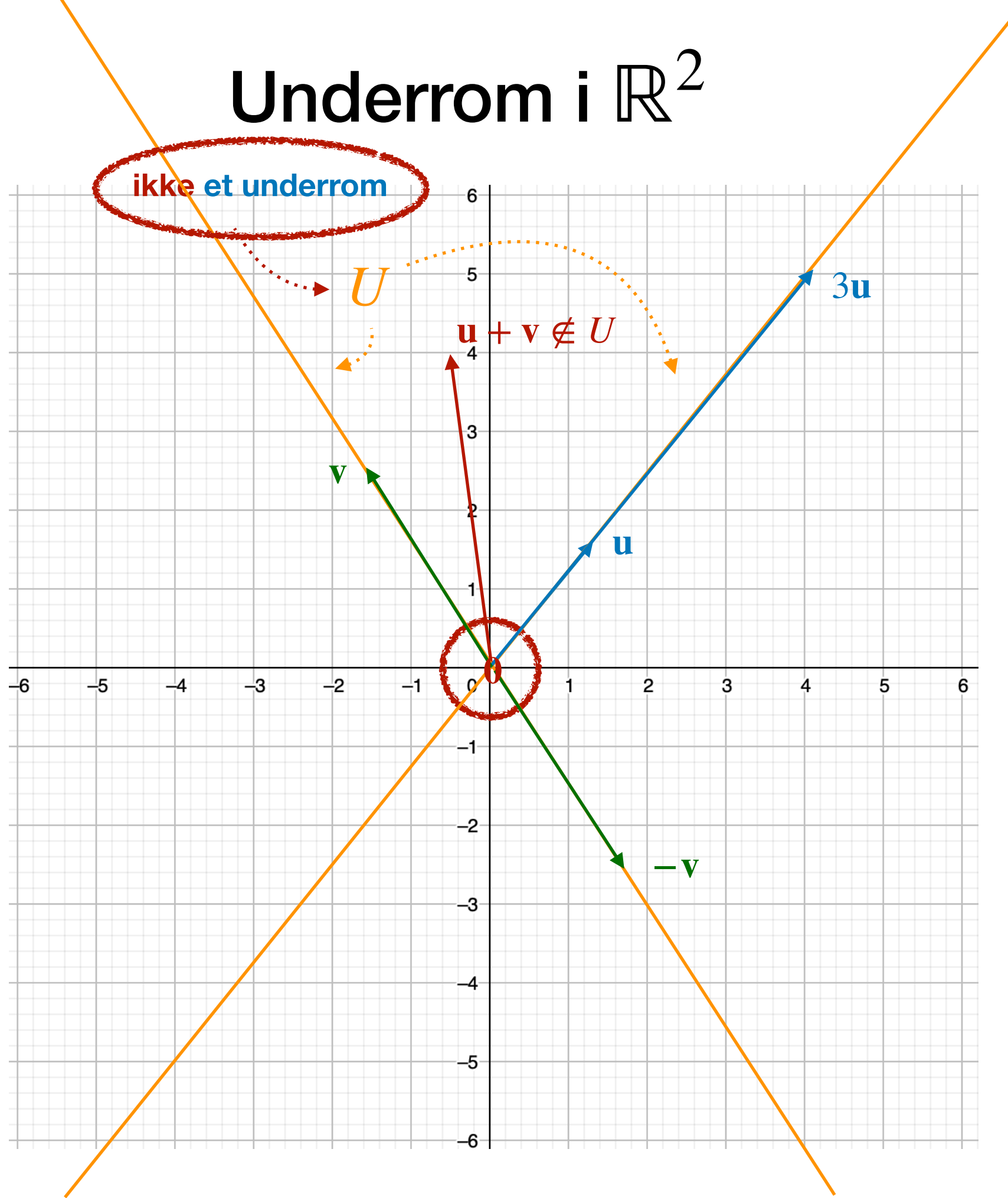
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



Underrom i $\mathbb{R}^2$

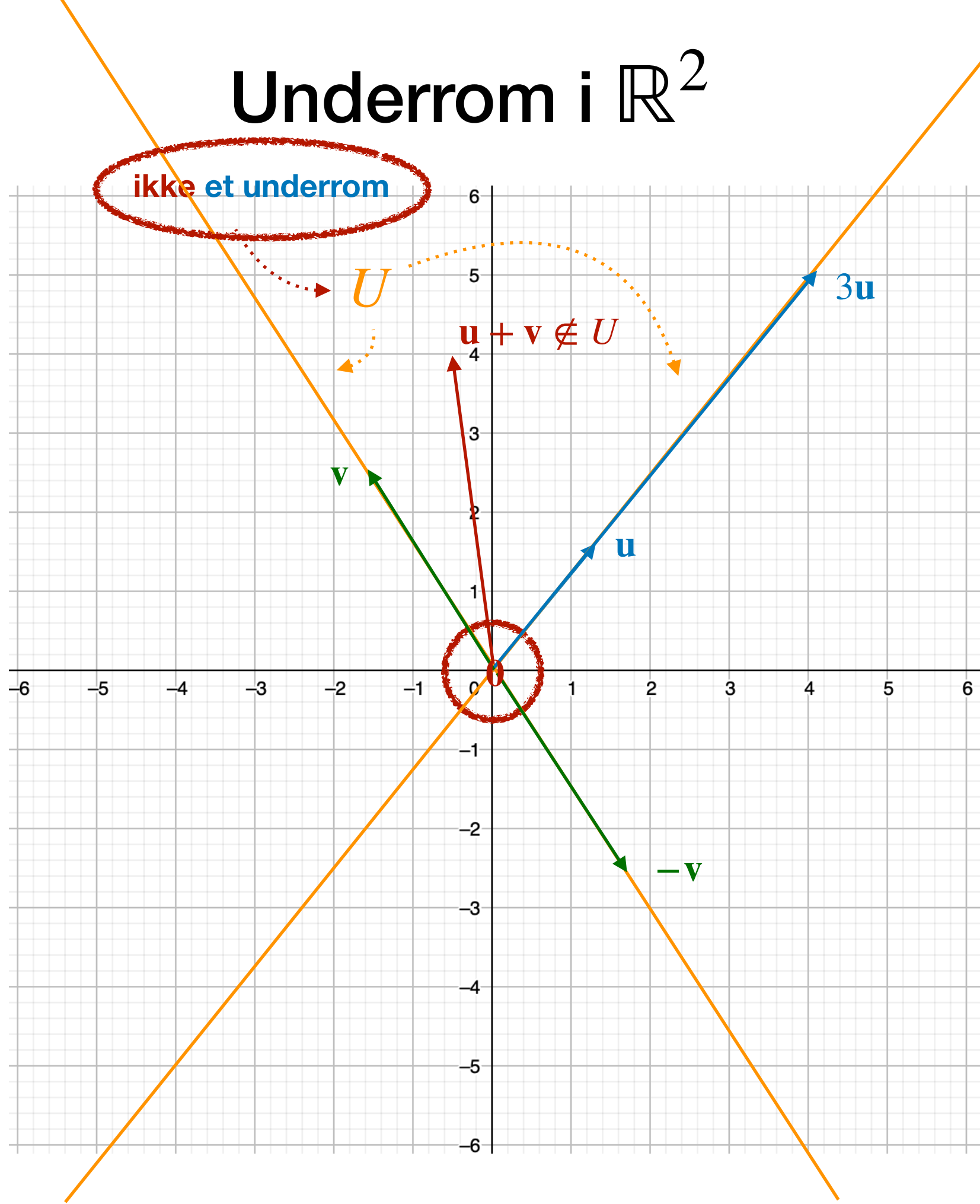
- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!

enkle

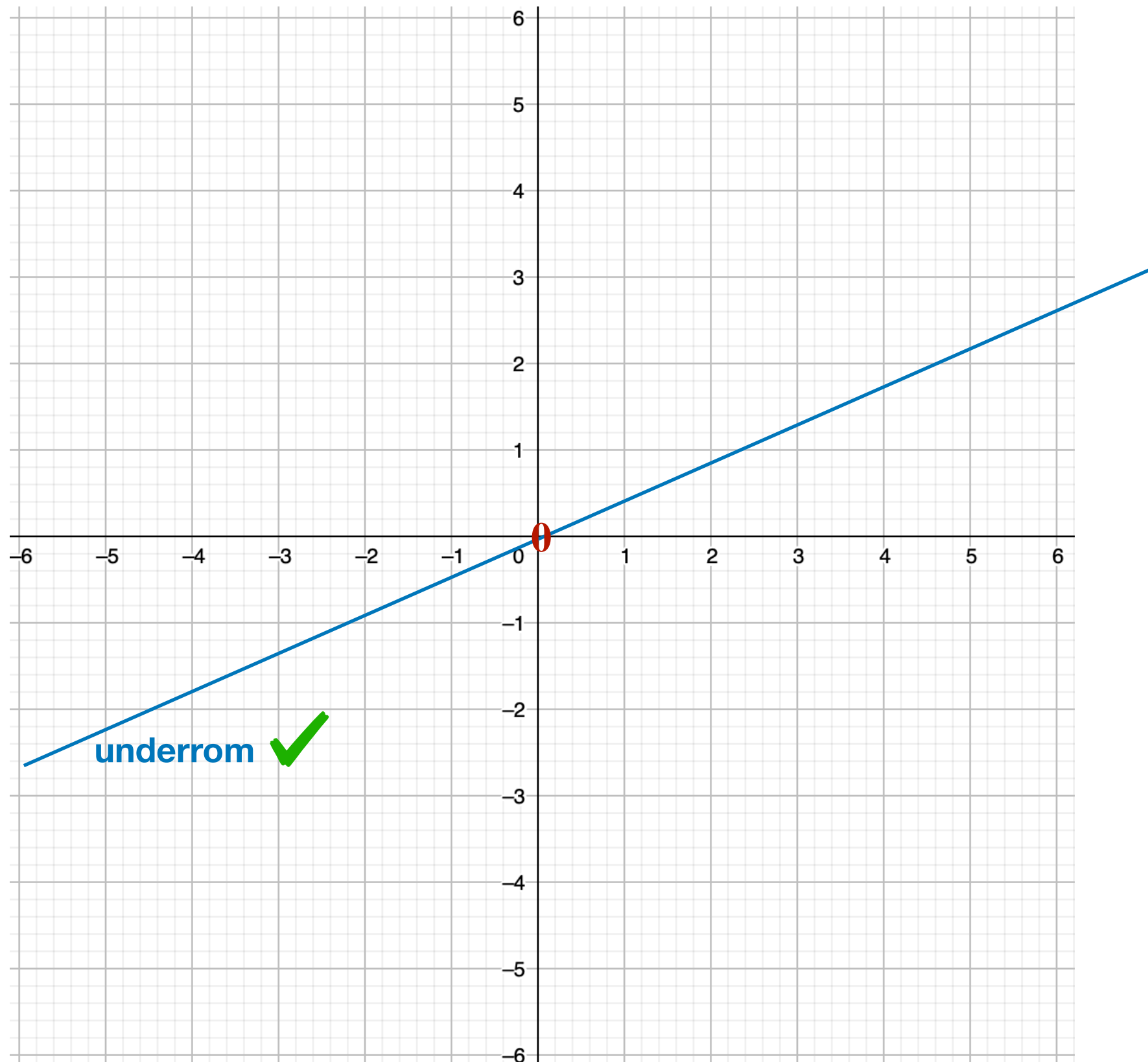


Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$

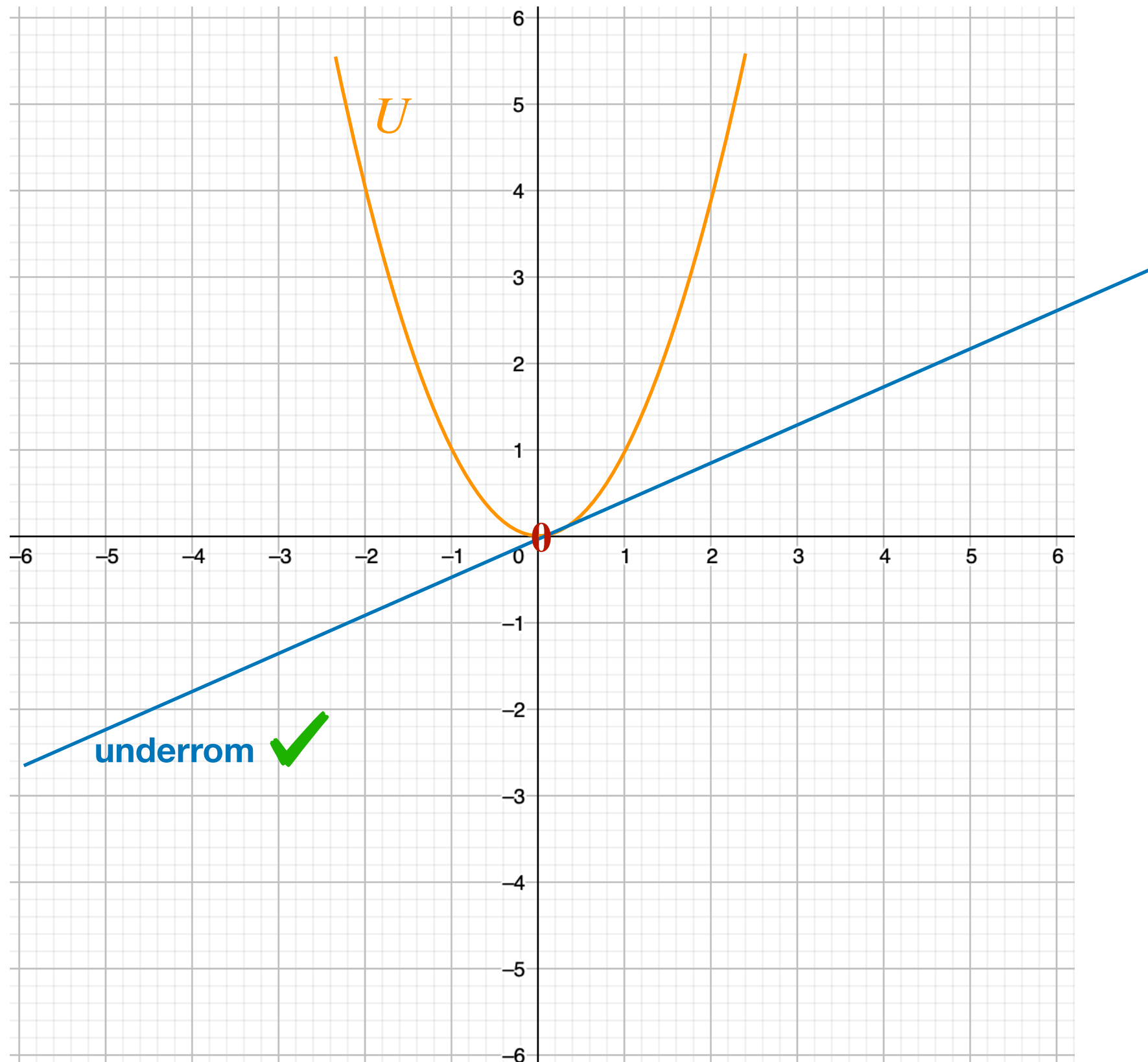
- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!



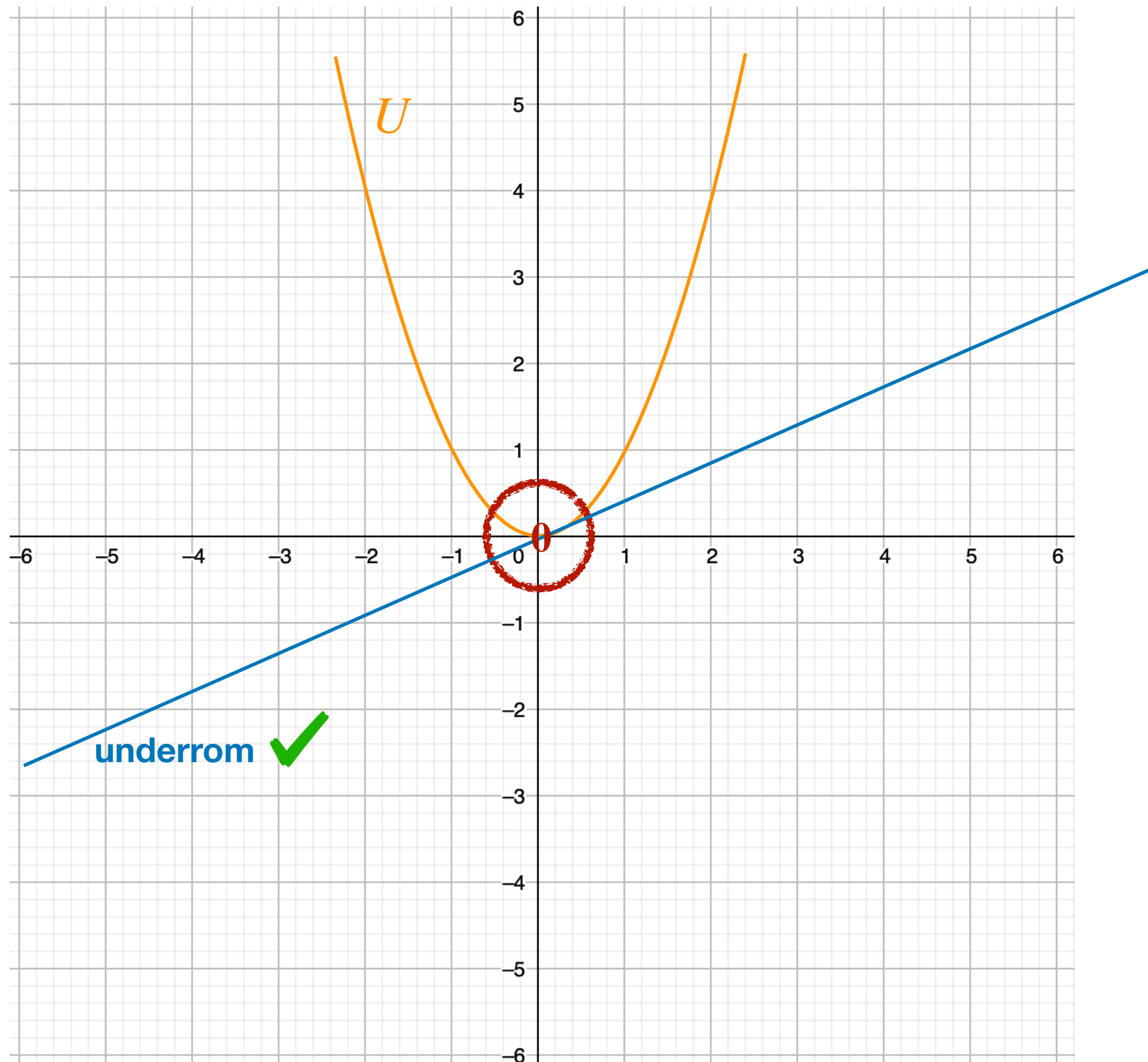
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



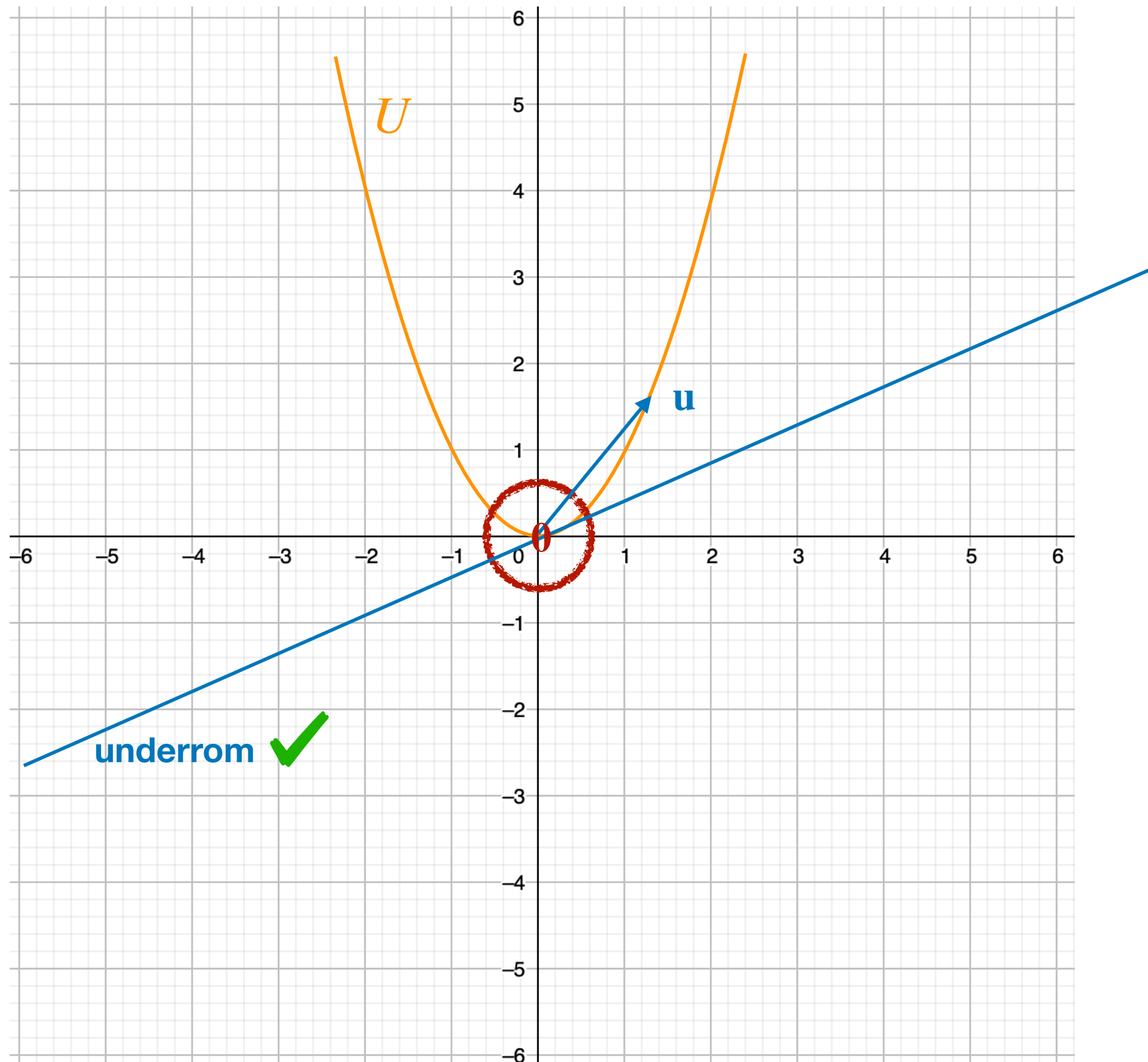
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



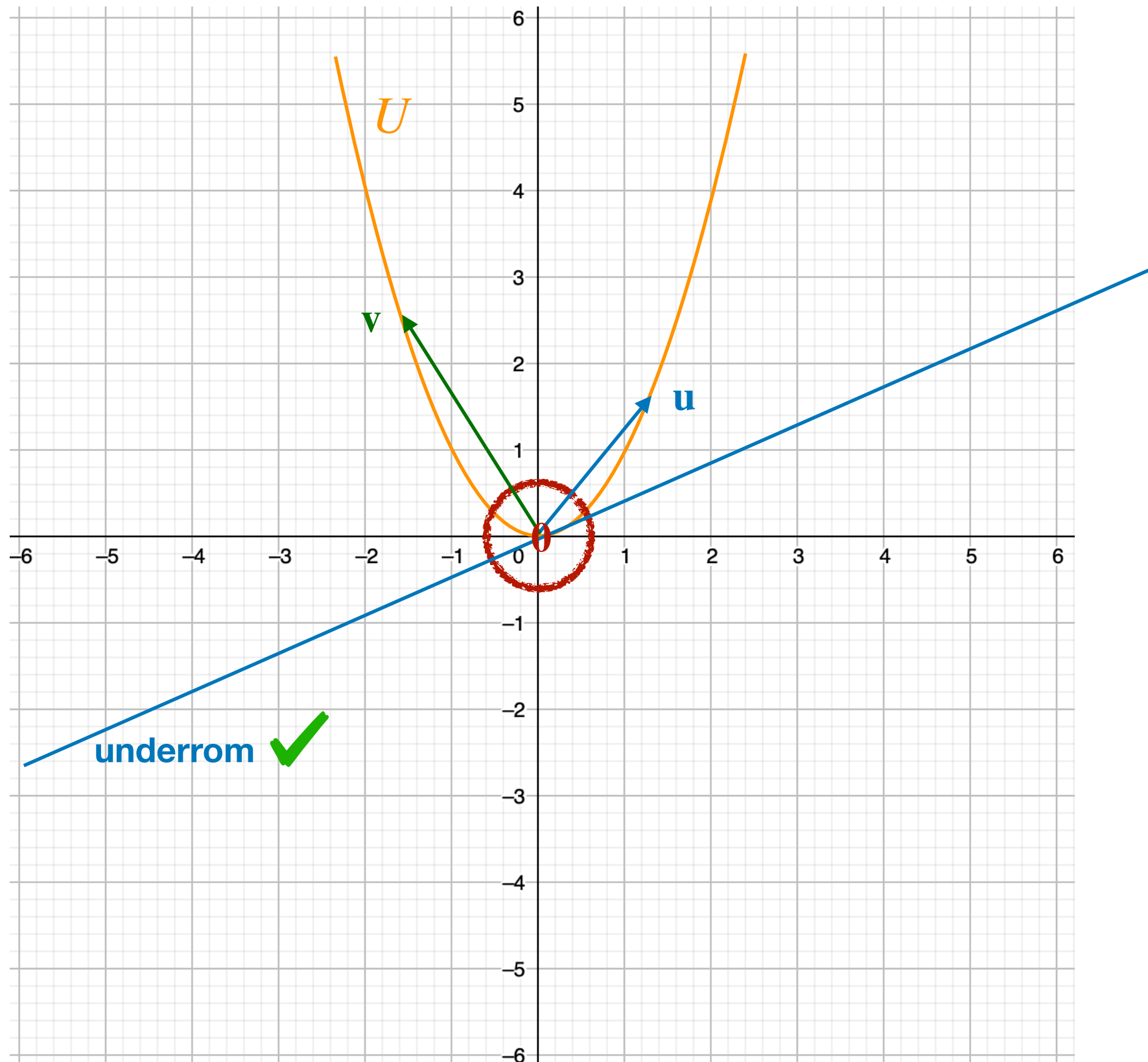
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



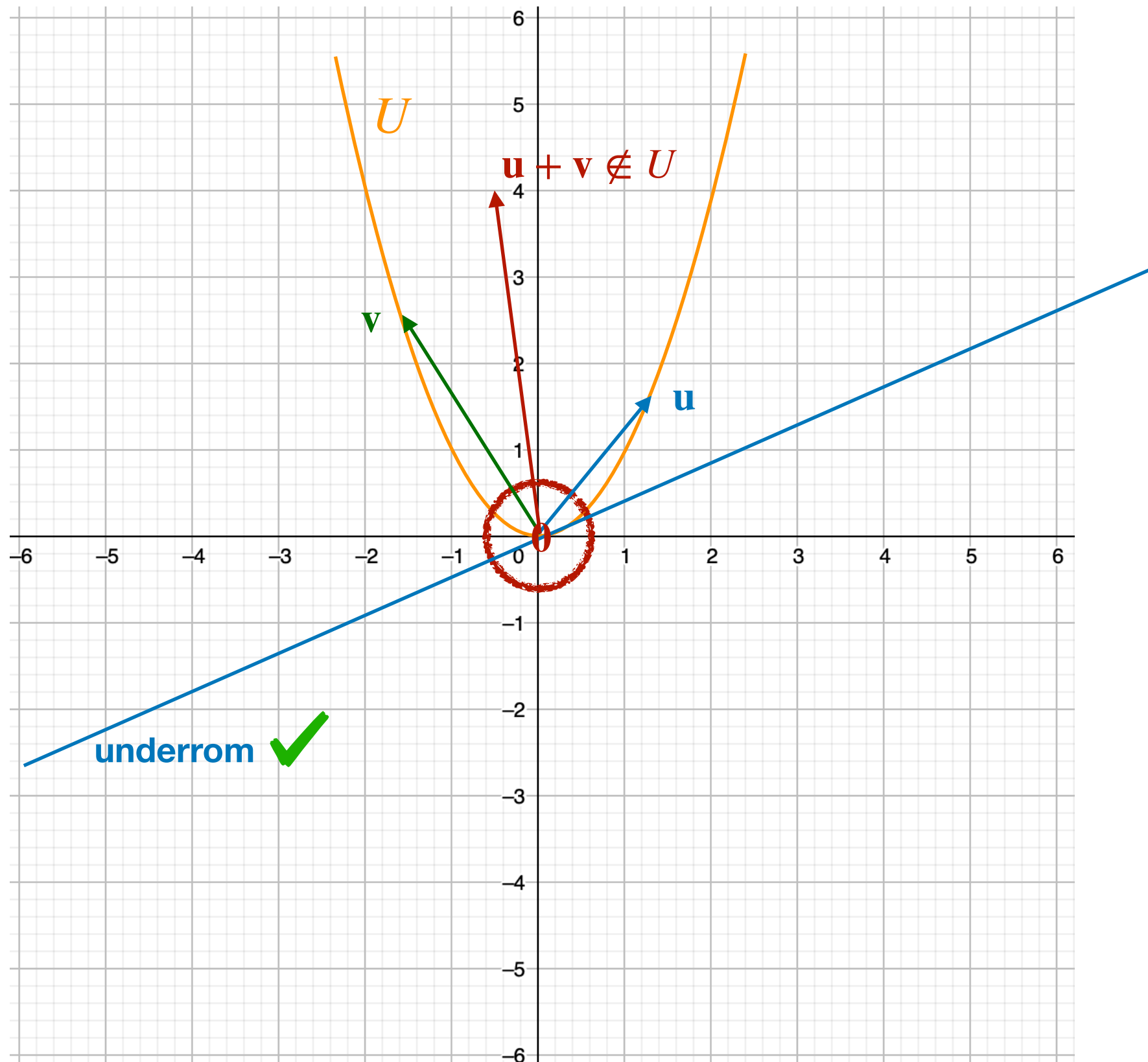
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



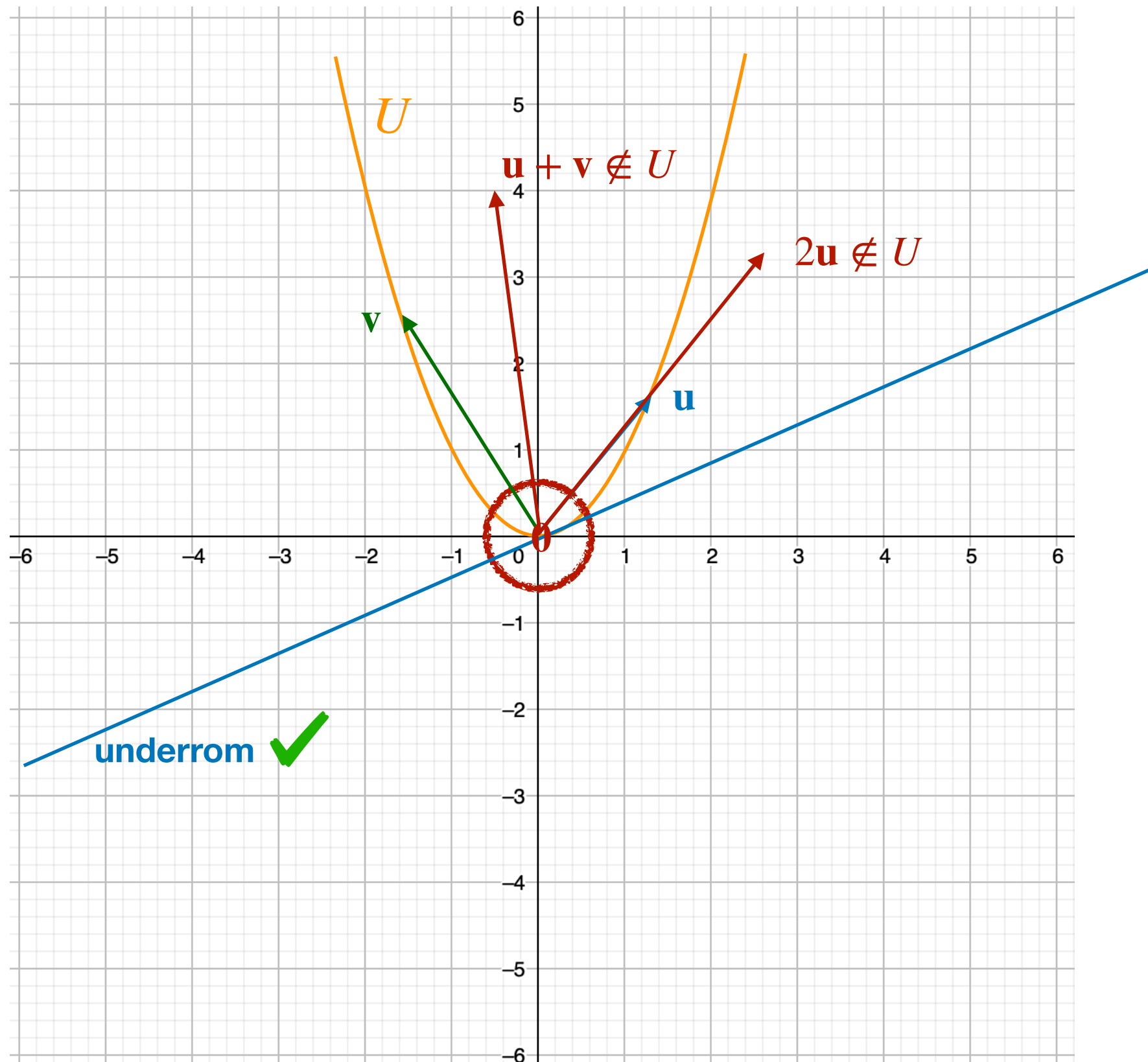
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



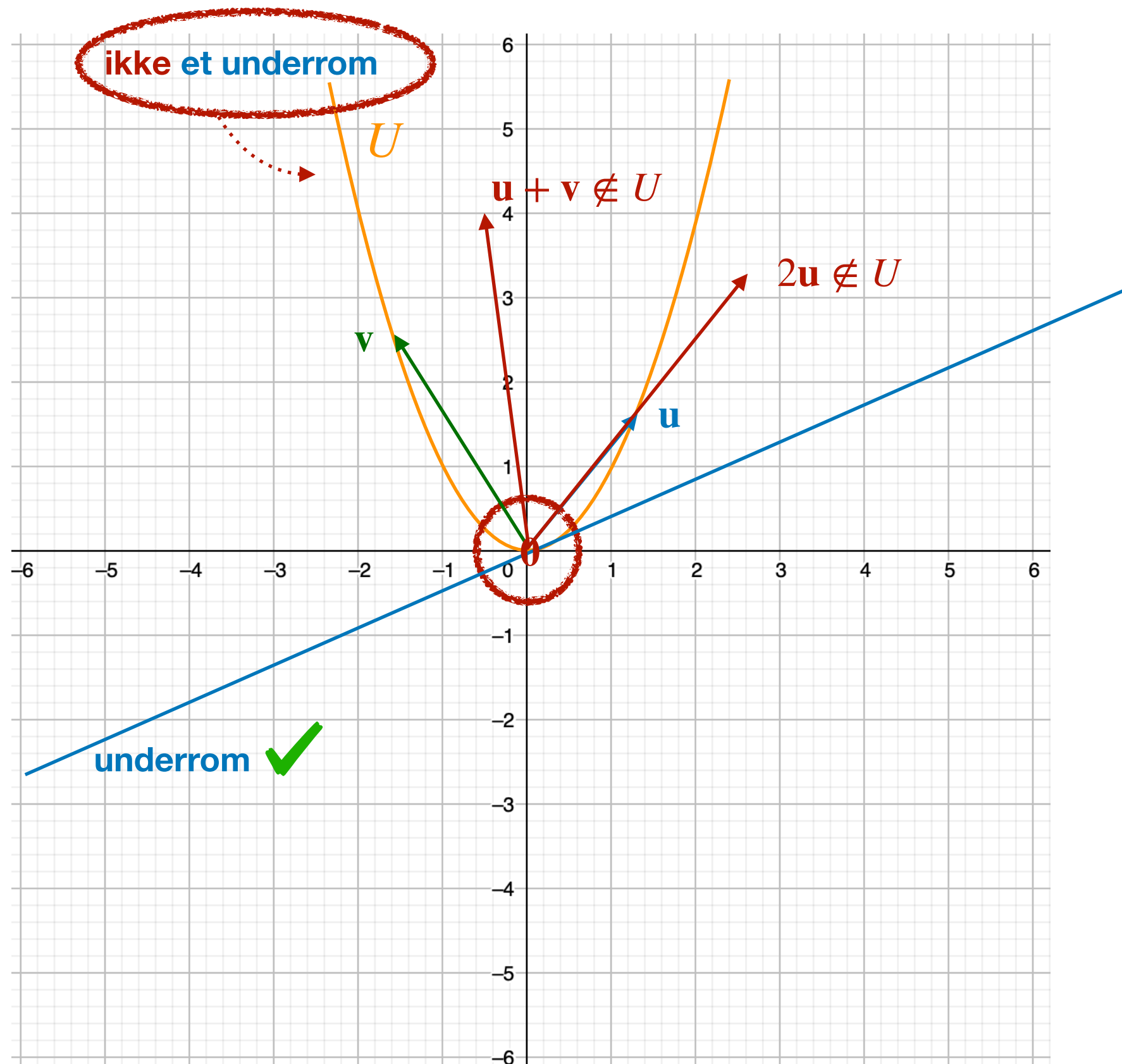
Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



Underrom i $\mathbb{R}^2$

- $U = \mathbb{R}^2$
 - $U = \{\mathbf{0}\}$
- og alle uendelig lange rette linjer gjennom origo er underrom!



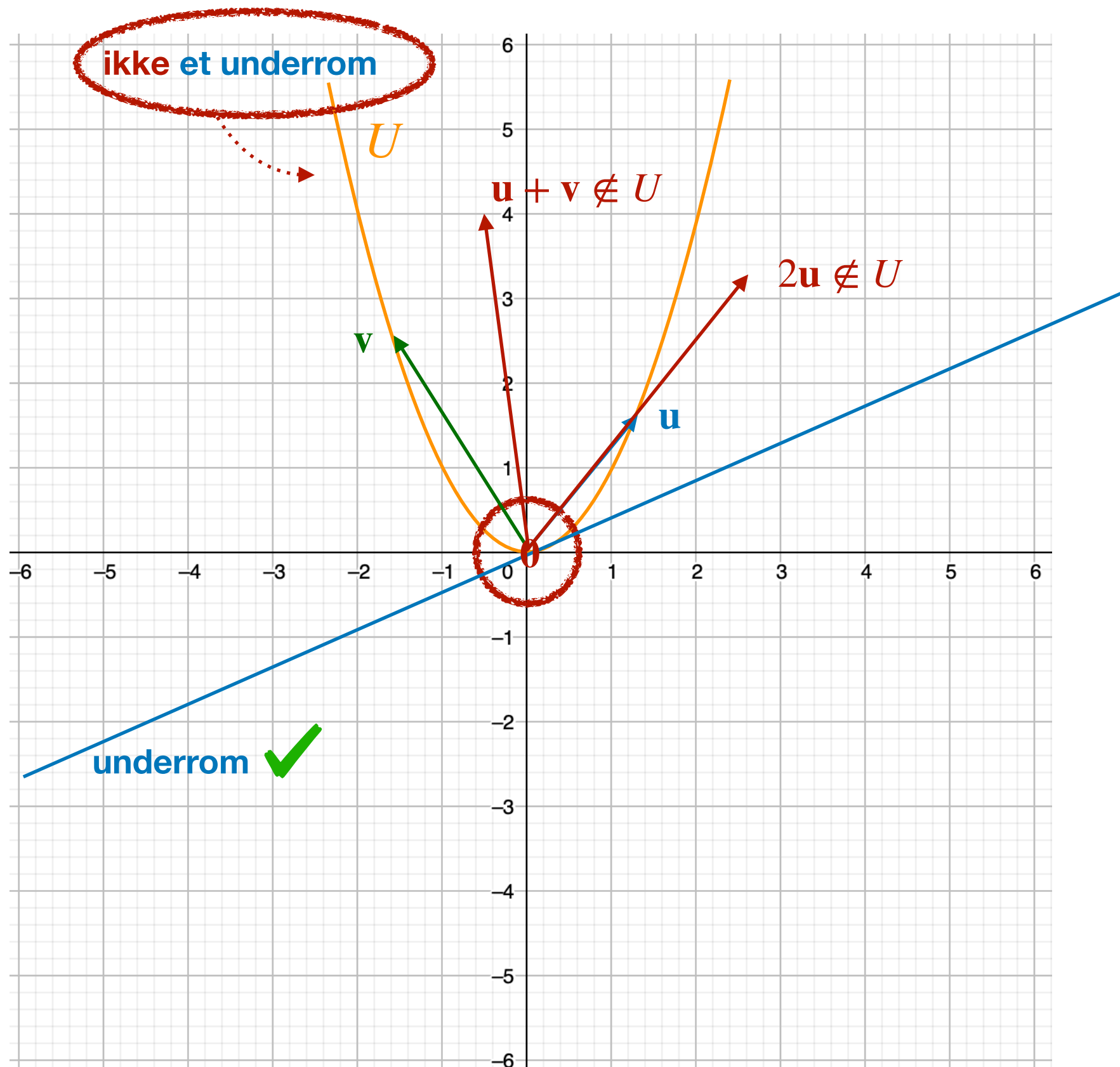
Underrom i $\mathbb{R}^2$

Kun

- $U = \mathbb{R}^2$

- $U = \{\mathbf{0}\}$

og alle uendelig
lange rette linjer
gjennom origo
er underrom!



Matematikk 3

Vektorrom - Lineær uavhengighet

Det lineære spennet

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

La $v_1, \dots, v_n$ være en samling med vektorer i V .

det er begrepet vi definerer

- Det **lineære spennet** av $v_1, \dots, v_n$ er mengden $\text{Sp}\{v_1, \dots, v_n\}$ som består av alle **lineærkombinasjoner** av $v_1, \dots, v_n$ i V .

Mer formelt: $\text{Sp}\{v_1, \dots, v_n\} = \{a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n \text{ der } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ er tall}\}$

reelle eller
komplekse

For eksempel:

$3 \cdot \sin + 2 \cdot \cos$ er en lineærkombinasjon av $\sin$ og $\cos$ i $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Men: $\sin \cdot \cos$ er **ikke** en lineærkombinasjon av $\sin$ og $\cos$.

Lineær uavhengighet

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

La $v_1, \dots, v_n$ være en samling med vektorer i V .

det er begrepet vi definerer

- Vi sier at vektorene $v_1, \dots, v_n$ er **lineært uavhengige** dersom ligningen

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0}$$

reelle eller
komplekse
tall

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

fordi vi kan alltid skrive nullvektoren som $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$

Ellers kalles vektorene **lineært avhengige** dvs dersom vi kan skrive

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n = \mathbf{0}$$

der **minst én** av $a_1, \dots, a_n$ **ikke er 0**.

Lineær uavhengighet

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ er **lineært uavhengige** dersom ligningen

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

..... fordi vi kan alltid skrive nullvektoren som $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$

Generelle eksempler:

- Dersom minst én av vektorene er **nullvektoren**, så er de **lineært avhengige**.

..... ▶ **anta** $v_1 = 0$, da kan vi skrive $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$
 $x_1 \neq 0$

- Dersom en av vektorene $v_1, \dots, v_n$ er en lineærkombinasjon av de andre vektorene, så er $v_1, \dots, v_n$ **lineært avhengige**.

..... ▶ **anta** $v_1 = a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$, da kan vi skrive $(-1) \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$
 $x_1 \neq 0$

Lineær uavhengighet

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ er **lineært uavhengige** dersom ligningen

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Eksempel: $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerlige funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

dette vises i
en annen video

- Funksjonene $\cos$ og $\sin$ er **lineært uavhengige**.
- Funksjonene $f(t) = e^t$ og $p(t) = t^2 - 1$ er **lineært uavhengige**.

vi ser på ligningen $x_1 \cdot f + x_2 \cdot p = 0$

funksjonen som er
konstant null

dvs vi har $x_1 e^t + x_2 (t^2 - 1) = 0$ **for alle t**

husk: x_1 og x_2 er konstante tall,
mens t er variabelen i funksjonene

især for $t = 1$: $x_1 e^1 + x_2 (1 - 1) = 0$ altså $x_1 e = 0$ og dermed $x_1 = 0$

mens for $t = 2$: $0e^2 + x_2 (4 - 1) = 0$

og dermed også $x_2 = 0$

Lineær uavhengighet

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ er **lineært uavhengige** dersom ligningen

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0}$$

 kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Eksempel: $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerlige funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

- Vi ser på funksjonene

$$f(t) = \cos t + 2 \sin t + 3e^t$$

$$g(t) = 4 \cos t + 5 \sin t + 6e^t$$

$$h(t) = 7 \cos t + 8 \sin t + 9e^t$$

Da er f, g, h **lineært avhengige** i V fordi vi har likheten

$$-f(t) + 2g(t) - h(t) = 0 \text{ for alle } t \quad \text{dvs } \underbrace{(-1)} \cdot \underbrace{f} + 2 \cdot \underbrace{g} + \underbrace{(-1)} \cdot \underbrace{h} = \mathbf{0} \text{ i } V.$$

koeffisienter som **ikke** er null

Sin og cos er lineært uavhengige i $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$:

Husk: I et vektorrom V er to vektorer v_1 og v_2

lineært uavhengige dersom ligningen

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 = \mathbf{0}$$

kun har den triviale løsningen $c_1 = c_2 = 0$.

Eksempel: $\sin, \cos$ i $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$c_1 \cdot \sin + c_2 \cdot \cos = \mathbf{0} \leftarrow \text{funksjonen som er konstant null}$$

$\Leftrightarrow$ for alle $t \in \mathbb{R}$:

$$c_1 \cdot \sin(t) + c_2 \cdot \cos(t) = 0 = \mathbf{0}(t)$$

$$\cdot \text{velg } t = \frac{\pi}{2}: \quad c_1 \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 + c_2 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

• velg $t=\pi$: $c_1 \cdot \underbrace{\sin \pi}_0 + c_2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot (-1) = -c_2$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

Ligningen $c_1 \cdot \sin + c_2 \cdot \cos = 0$ kun

skunnes for $c_1 = c_2 = 0$. ✓

Matematikk 3

Vektorrom - Basis og Dimensjon

Endelig dimensjonale vektorrom

 reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

Spørsmål: **Hvor mange** vektorer trenger vi for å utspenne V ?

Med andre ord: Hvor mange vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ i V trenger vi for å kunne si:

For alle $\mathbf{v}$ i V finnes det tall $a_1, a_2, \dots$ slik at $\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots$

For eksempel:

- $V = \mathbb{R}^2$ utspennes for eksempel av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \end{bmatrix}$.
- $V = \mathbb{C}^3$ utspennes for eksempel av $\begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5+i \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$.

Endelig dimensjonale vektorrom

 reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

Spørsmål: **Hvor mange** vektorer trenger vi for å utspenne V ?

Med andre ord: Hvor mange vektorer $v_1, v_2, \dots$ i V trenger vi for å kunne si:

For alle v i V finnes det tall $a_1, a_2, \dots$ slik at $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots$

For eksempel:

- Kan vi også utspenne $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ av vektorer?

Ja, fordi hvert vektorrom utspennes av alle sine vektorer. 

Men det er uendelig mange...

Endelig dimensjonale vektorrom

reelt eller
komplekst

Vektorrom V (med operasjonene $+$, $\cdot$)

det er begrepet vi definerer

- Vi sier at vektorrommet V er **endelig dimensjonalt** dersom det finnes en **endelig** samling med vektorer $v_1, \dots, v_n$ som utspenner V .

Med andre ord: For alle v i V finnes det tall $a_1, a_2, \dots, a_n$ slik at

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$$

Eksempler:

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^3$, faktisk er alle $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ endelig dimensjonale.
- $\text{Col } A$ er endelig dimensjonalt. utspent av kolonnene til en matrise A
- Og $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$? **Nei!** $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ er ikke endelig dimensjonalt.

“En basis er den mest effektive
måten å beskrive V .”

Basis

- Vi sier at vektorene $v_1, \dots, v_n$ danner en **basis** for V dersom $v_1, \dots, v_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

vi får alt med

vi kan **ikke** droppe noen av vektorene

- Gitt en vektor v i V :

Da **finnes det** tall $a_1, \dots, a_n$ med

tallene er unike for hver v

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$$

mer om dette i en annen video

Basis

Vektorene $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ danner en **basis** for V dersom $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

Eksempler:

- I $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ danner vektorene $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ en basis.

Den kalles **standardbasisen**.

- I $V = \mathbb{R}^2$ danner vektorene $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en basis;
- men også vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, eller $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -23 \\ -17 \end{bmatrix}, \dots$

Basis og dimensjon

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ danner en **basis** for V dersom $v_1, \dots, v_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

Gode nyheter:

- Hvert vektorrom har en basis.

~~Ikke så~~ gode nyheter:

- Det finnes alltid mange forskjellige basiser.

det er praktisk:

ortonormal basis

basis av egenvektorer

⋮

Knallgode nyheter:

- I et endelig dimensjonalt vektorrom har **alle basiser samme antall** vektorer.

Dette tallet kalles **dimensjon** av vektorrommet.

Basis og dimensjon

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ danner en **basis** for V dersom $v_1, \dots, v_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

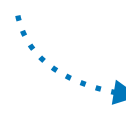
$\dim V =$ dimensjon av $V =$ antall vektorer i en basis for V

 notasjon

Hva forteller oss dimensjonen?

 eller "hvor stor" er V

- Dimensjonen måler "hvor fritt vi kan bevege oss" i V .
- Vi kan bruke dimensjonen for å forstå alle underrom i V .

 fordi: $\dim U \leq \dim V$ når U er et underrom i V og $\dim U = \dim V \iff U = V$

- Eksempel: I $\mathbb{R}^3$ har vi kun følgende underrom:

- $\dim 0: \{0\}$
- $\dim 1:$ linjer gjennom origo
- $\dim 2:$ planer gjennom origo
- $\dim 3: \mathbb{R}^3$

Basis og dimensjon

Vektorene $v_1, \dots, v_n$ danner en **basis** for V dersom $v_1, \dots, v_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

$\dim V = \text{dimensjon av } V = \text{antall vektorer i en basis for } V$

Tidligere eksempler:

- $V = \mathbb{R}^2$ **utspennes** av $\overset{\text{basis}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \end{bmatrix}}$.
- $V = \mathbb{C}^3$ **utspennes** av $\begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5-i \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}$.

basis

↓ **kolonnerommet til en matrise A**

- $\dim \text{Col } A = \text{antall pivotkolonner i } A$

↓ **nullrommet til en matrise A**

- $\dim \text{Null } A = \text{antall kolonner som ikke er pivotkolonner}$

[mer om dette i en annen video](#)

Matematikk 3

Vektorrom - Koordinater

“En basis er den mest effektive måten å beskrive V .”

Basis

V et endelig dimensjonalt vektorrom

- Vi sier at vektorene $v_1, \dots, v_n$ danner en **basis** for V dersom $v_1, \dots, v_n$ både utspenner V og er lineært uavhengige.

- Gitt en vektor v i V .

Da finnes det tall $a_1, \dots, a_n$ med

tallene er unike for hver v

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$$

ta differensen

$$v = b_1 \cdot v_1 + \dots + b_n \cdot v_n$$

fordi: om det også fantes $b_1, \dots, b_n$ med

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

lineær uavhengighet

$$= 0 \quad \dots \quad = 0$$

Koordinater

V et endelig dimensjonalt vektorrom

Vi velger altså en **basis** $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V dvs en liste med vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige.

For hver vektor $\mathbf{v}$ i V finnes det tall $a_1, \dots, a_n$ med

$$\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

tallene er unike for hver $\mathbf{v}$

altså kan vi definere

- Vi kaller tallene $a_1, \dots, a_n$ **koordinatene til $\mathbf{v}$** med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Koordinater

V et endelig dimensjonalt vektorrom

Vi har valgt en **basis** $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V dvs en liste med vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige.

- **Koordinatene til $\mathbf{v}$** med hensyn på basisen $\mathcal{B}$ er tallene $a_1, \dots, a_n$ med

$$\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

det er en vektor i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$

om V er et
reelt vektorrom

om V er et
komplekst vektorrom

- Vi kaller denne vektoren **koordinatvektoren til $\mathbf{v}$** med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Merk: Når vi velger en annen basis, så får vi andre koordinater for $\mathbf{v}$

Lineærtransformasjoner...

Koordinater

V et endelig dimensionalt
reelt vektorrom

V har valgt en basis $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V dvs en liste med vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige.

- Koordinatene til $\mathbf{v}$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$ er tallene $a_1, \dots, a_n$ med

$$\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

det er en vektor i $\mathbb{R}^n$

om V er et
reelt vektorrom

basis

en vektor $\mathbf{v}$ i V

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

en koordinatvektor i $\mathbb{R}^n$

Spørsmål i V

oversettes til

Spørsmål i $\mathbb{R}^n$

Koordinater

V et endelig dimensionalt
reelt vektorrom

V har valgt en **basis** $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ for V dvs en liste med vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige.

Spørsmål i V

oversettes til

Spørsmål i $\mathbb{R}^n$

😎 basiser og koordinater 😎

For eksempel:

- **Teorem:** Vektorer $w_1, \dots, w_k$ er lineært uavhengige i V hvis og bare hvis koordinatvektorene $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}}$ er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^n$.

Koordinater

Eksempel: $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerlige funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Vi ser på underrommet $U = \text{Sp}(\cos t, \sin t, e^t)$ i V .

Vi velger en **basis** $\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for U .

vi må sjekke at vektorene er
lineært uavhengige

- Vi ser på funksjoner i U :

$$f(t) = \cos t + 2 \sin t + 3e^t$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$g(t) = 4 \cos t + 5 \sin t + 6e^t$$

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$h(t) = 7 \cos t + 8 \sin t + 9e^t$$

$$[h]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Spørsmål: Er f, g, h lineært avhengige eller uavhengige i U .

Koordinater

Eksempel: $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerlige funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

$U = \text{Sp}(\cos t, \sin t, e^t) \subset V$ Vi har valgt **basisen** $\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for U .

$$f(t) = \cos t + 2 \sin t + 3e^t \quad g(t) = 4 \cos t + 5 \sin t + 6e^t \quad h(t) = 7 \cos t + 8 \sin t + 9e^t$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[h]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

f, g, h er lineært uavhengige i U

hvis og bare hvis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^3$

Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ har tre pivotkolonner

det kan vi enkelt sjekke

Koordinater

Eksempel: $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{kontinuerlige funksjoner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

$U = \text{Sp}(\cos t, \sin t, e^t) \subset V$ Vi har valgt **basisen** $\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for U .

$$f(t) = \cos t + 2 \sin t + 3e^t \quad g(t) = 4 \cos t + 5 \sin t + 6e^t \quad h(t) = 7 \cos t + 8 \sin t + 9e^t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

radoperasjoner...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kun to pivotkolonner

radoperasjoner
endrer ikke
relasjonene
mellom
kolonnene

Dette viser at f, g, h er lineært avhengige i U .

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

dvs $(-1) \cdot f + 2 \cdot g + (-1) \cdot h = \mathbf{0}$ i V .

3. kolonne

1. kolonne

2. kolonne

Matematikk 3

Vektorrom - Basis for Null og Col

Basis for Null A

La A være en reell $m \times n$ -matrise.

$\text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Annotations:
- "nullrommet til A " points to $\text{Null } A$.
- "ligningssystem" points to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- The expression $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is circled in red.

- **Spørsmål:** Hvordan finner vi en **basis** for $\text{Null } A$?

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -11 \\ 2 & 6 & -4 & 5 & -17 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radoperasjoner...}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redusert trappeform

Basis for Null A

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

to pivotkolonner

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3 frie variabler

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 4x_5$$

$$x_4 = 5x_5$$

Vi får den generelle løsningen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ 5x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3$

Basis for Null A

Vi har den **generelle løsningen**:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ 5x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v}_3$

$\mathbf{x}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

- **Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ utspenner Null A .**
- **Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.**

Basis for Null A

Vi har den **generelle løsningen**:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 - 4x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 5x_5 \\ x_5 = 0 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_1 \qquad \qquad \mathbf{v}_2 \qquad \qquad \mathbf{v}_3$

- Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ utspenner Null A .
- Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.

 **dersom** $\mathbf{0} = \mathbf{x} = x_2\mathbf{v}_1 + x_3\mathbf{v}_2 + x_5\mathbf{v}_3$, så ...

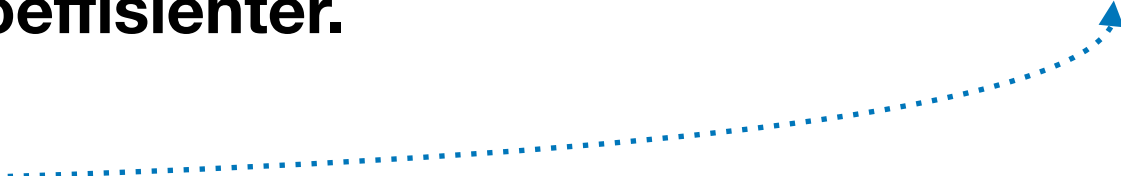
- **Konklusjon:** Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ danner en basis for Null A .

Basis for Null A

Oppskrift for å finne en basis for Null A :

- Bruk radoperasjoner og bring matrisen på redusert trappeform.
- Finn den generelle løsningsvektoren for det tilsvarende ligningssystemet.
- Separer den generelle løsningen i en sum av vektorer, én for hver fri variabel.
- Løsningsvektoren er nå en lineærkombinasjon av vektorer med de frie variablene som koeffisienter.

- Disse vektorene danner en basis for Null A .


$$x_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Dette viser: $\dim \text{Null } A = \text{antall frie variabler} = \text{antall kolonner som ikke er pivotkolonner}$

Basis for Col A

La A være en reell $m \times n$ -matrise.

↓ kolonnerommet til A

vi må kaste ut kolonnene
som er lineærkombinasjoner
av andre kolonner

Col A = underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A

- **Spørsmål:** Hvordan finner vi en **basis** for Col A ?

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -11 \\ 2 & 6 & -4 & 5 & -17 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}_1$

$\mathbf{a}_2$

$\mathbf{a}_3$

$\mathbf{a}_4$

$\mathbf{a}_5$

1. kolonne

...

5. kolonne

radoperasjoner...

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redusert trappeform

Basis for Col A

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

radoperasjoner
endrer ikke
relasjonene
mellom
kolonnene fordi
løsningsmengdene av
ligningssystemene er like

$$\mathbf{a}_2 = 3 \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_3 = (-2) \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_5 = 4\mathbf{a}_1 + (-5) \cdot \mathbf{a}_4$$

to pivotkolonner

$$\text{Col } A = \text{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} = \text{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$$

- Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4$ er lineært uavhengige.

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Konklusjon:** Kolonnene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4$ danner en basis for Col A.

Basis for Col A

Oppskrift for å finne en basis for Col A :

- Bruk radoperasjoner og bring matrisen på redusert trappeform.
- Vi ser hvilke kolonner er pivotkolonner.
- Kolonnene i den opprinnelige matrisen A som blir til pivotkolonner i redusert trappeform danner en basis for Col A .

Merk: radoperasjoner
endrer kolonnerommet!

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dette viser: $\dim \text{Col } A = \text{antall pivotkolonner i } A$
- **Teorem:** $\dim \text{Col } A + \dim \text{Null } A = n$ (antall kolonner i A)

Basis for Col A

Oppskrift for å finne en basis for Col A :

- Bruk radoperasjoner og bring matrisen på redusert trappeform.
- Vi ser hvilke kolonner er pivotkolonner.
- Kolonnene i den opprinnelige matrisen A som blir til pivotkolonner i redusert trappeform danner en basis for Col A .

Merk: radoperasjoner
endrer kolonnerommet!

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dette viser: $\dim \text{Col } A = \text{antall pivotkolonner i } A$
- **Teorem:** $\dim \text{Col } A + \dim \text{Null } A = n$ (antall kolonner i A)

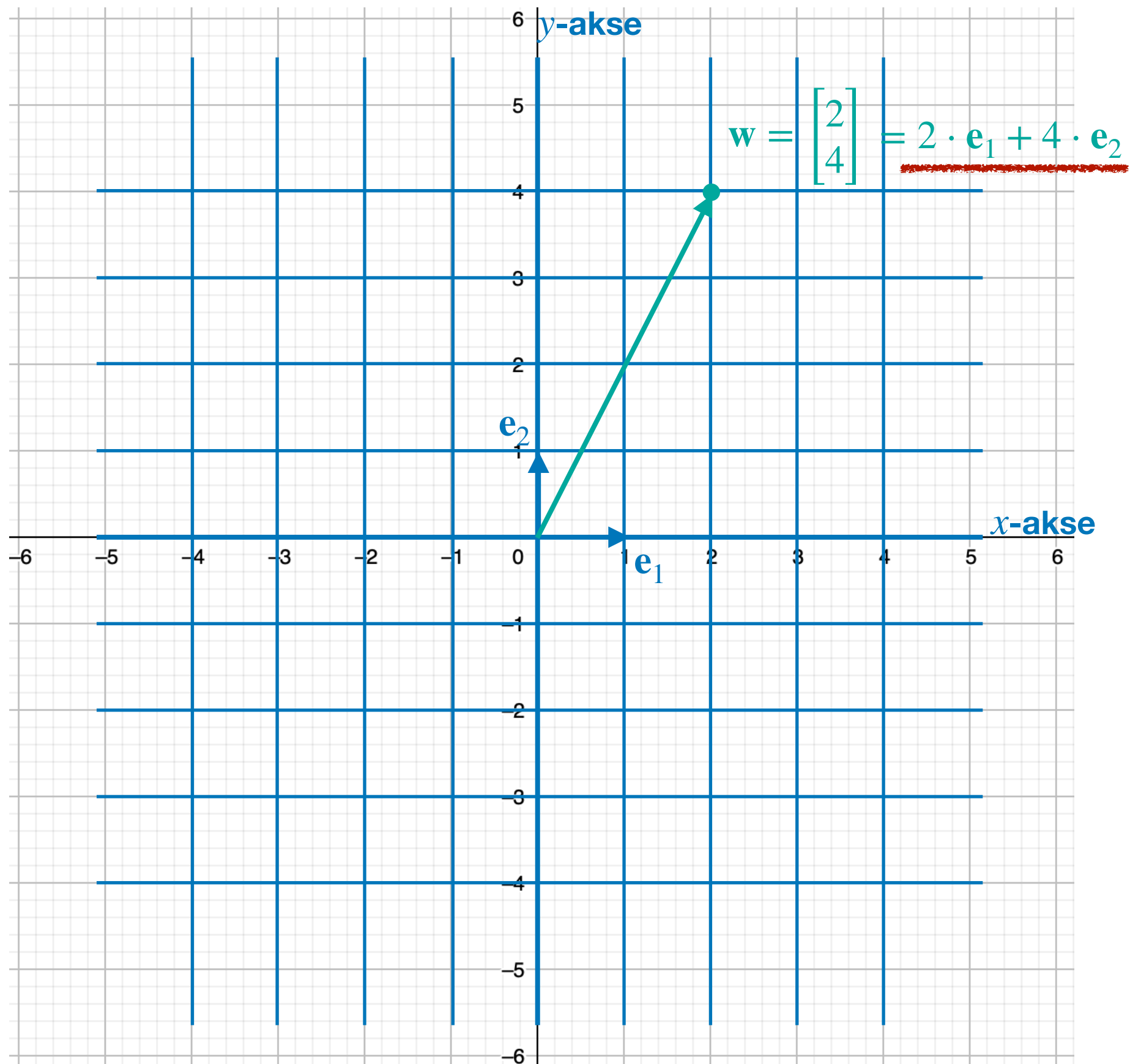
Matematikk 3

Vektorrom - Koordinater i $\mathbb{R}^2$

Koordinater i $\mathbb{R}^2$

- Standard-basis

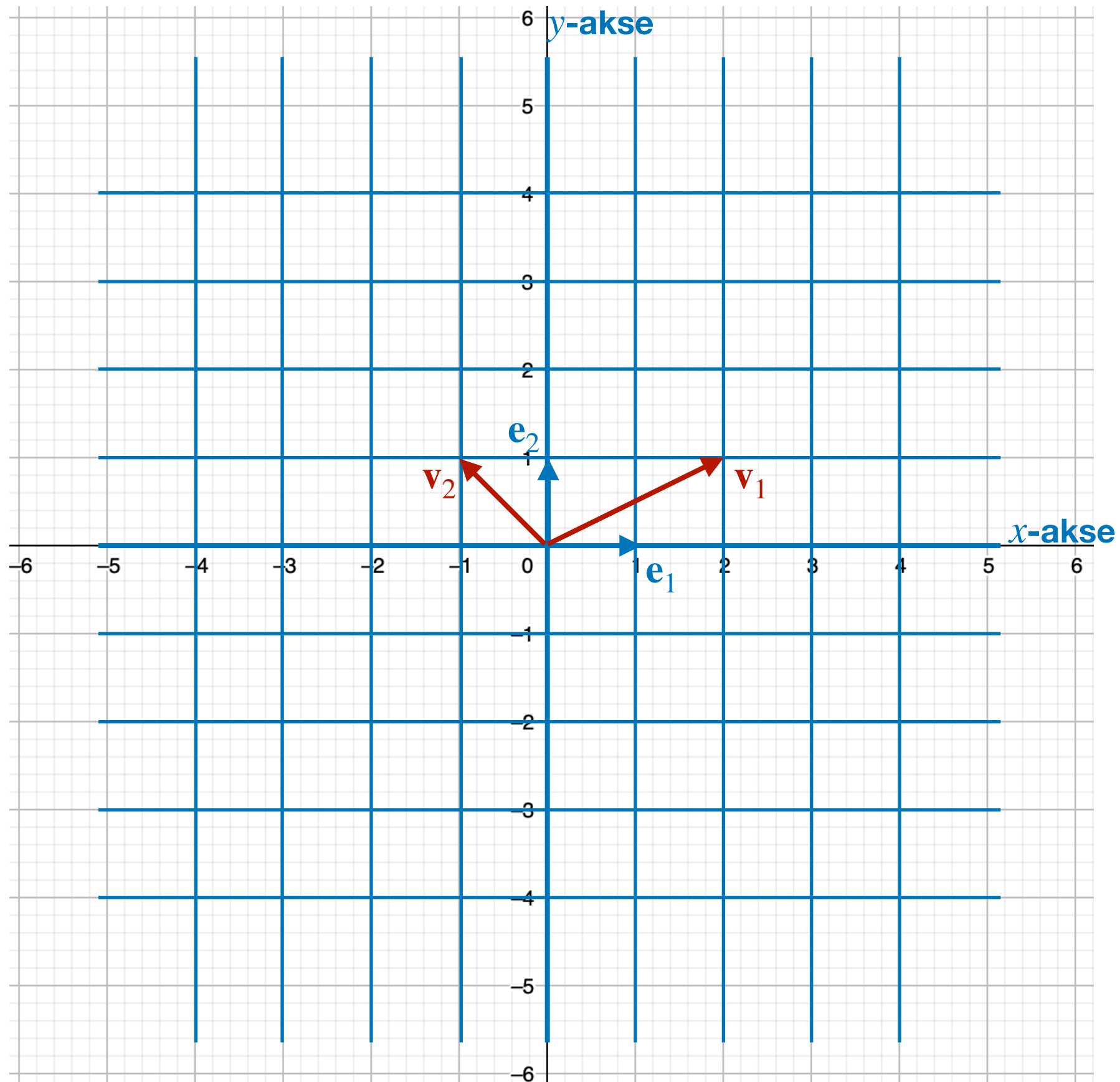
$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$



Koordinater i $\mathbb{R}^2$

- Standard-basis

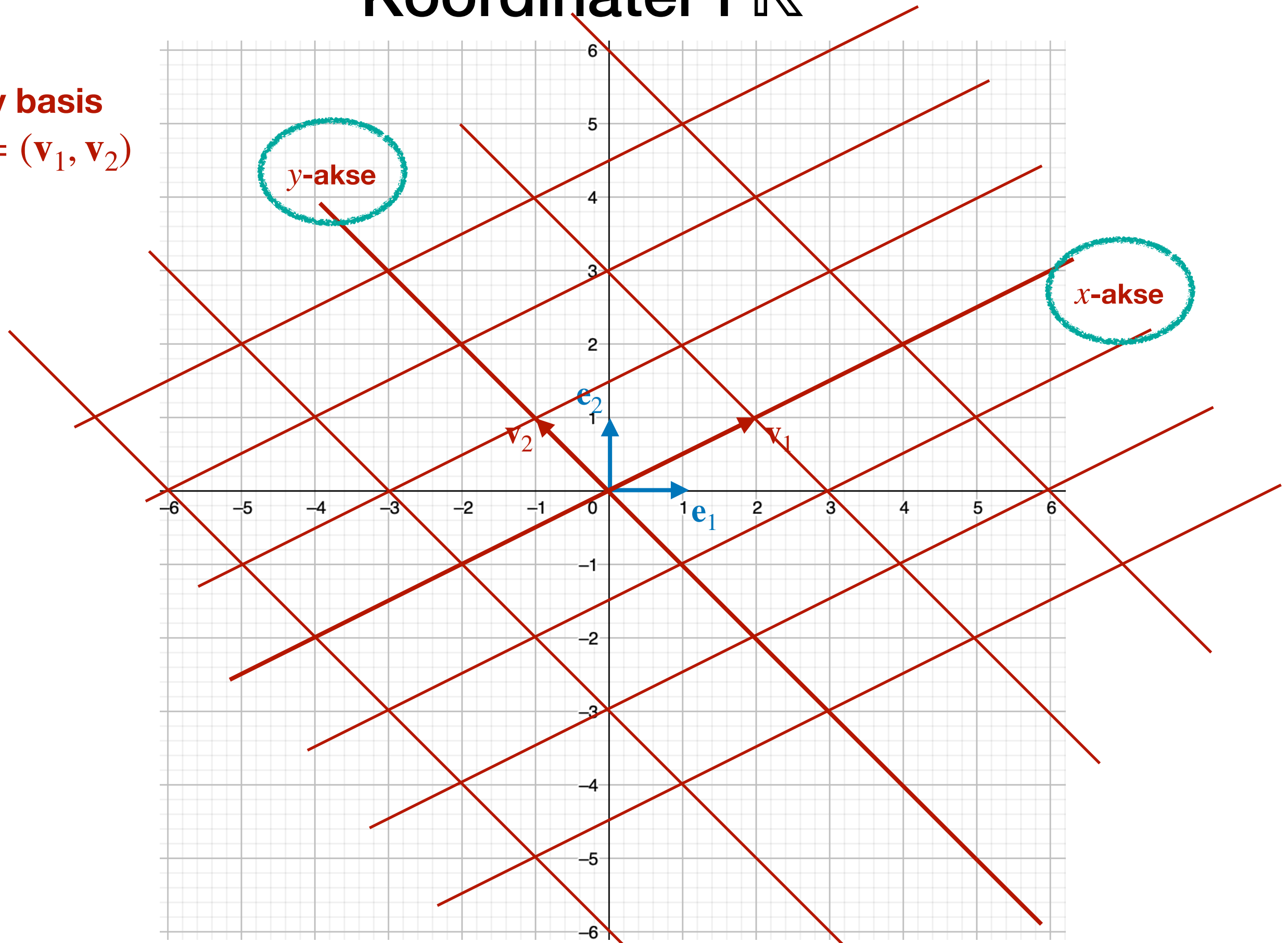
$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$



Koordinater i $\mathbb{R}^2$

- Ny basis

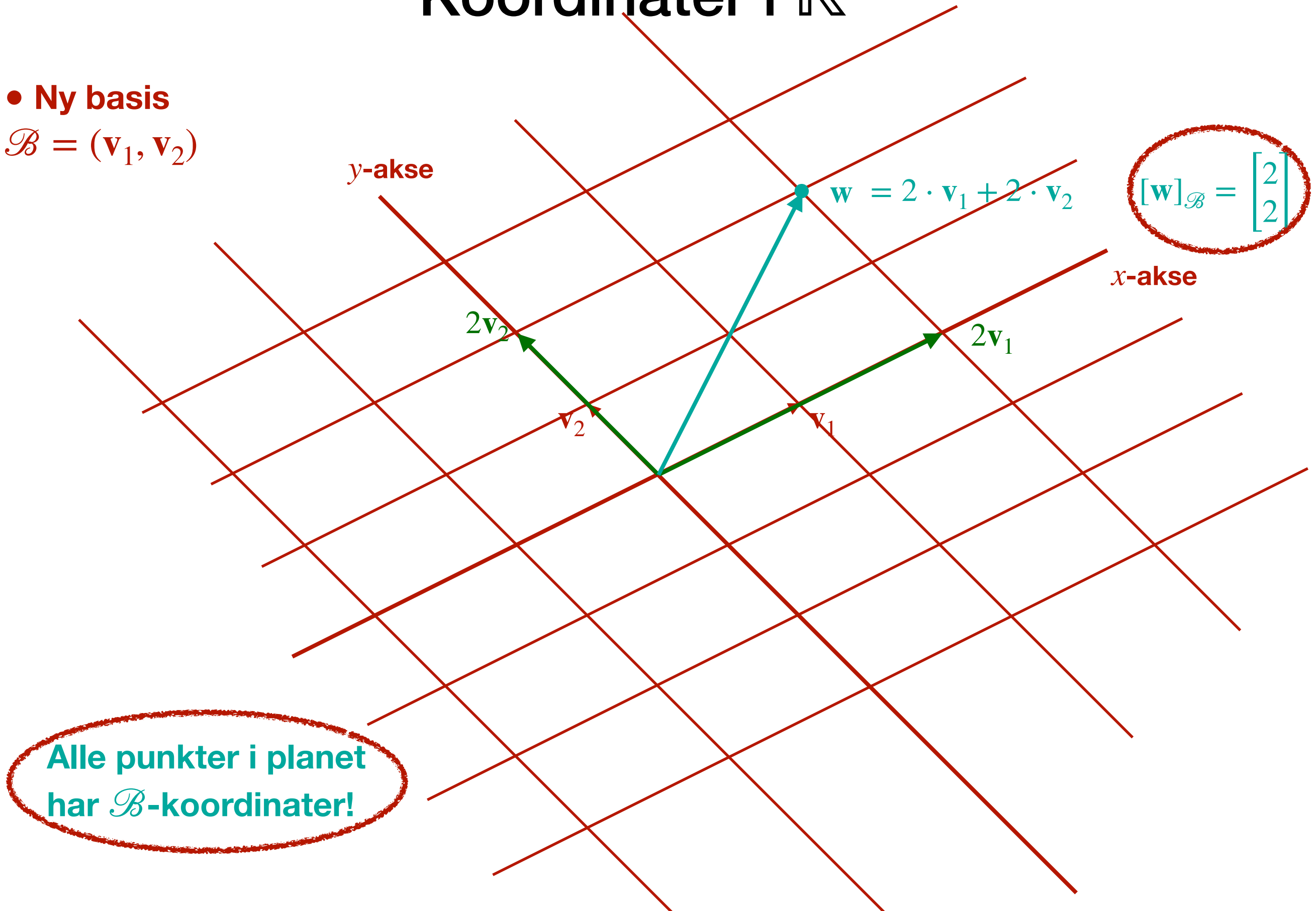
$$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$$



Koordinater i $\mathbb{R}^2$

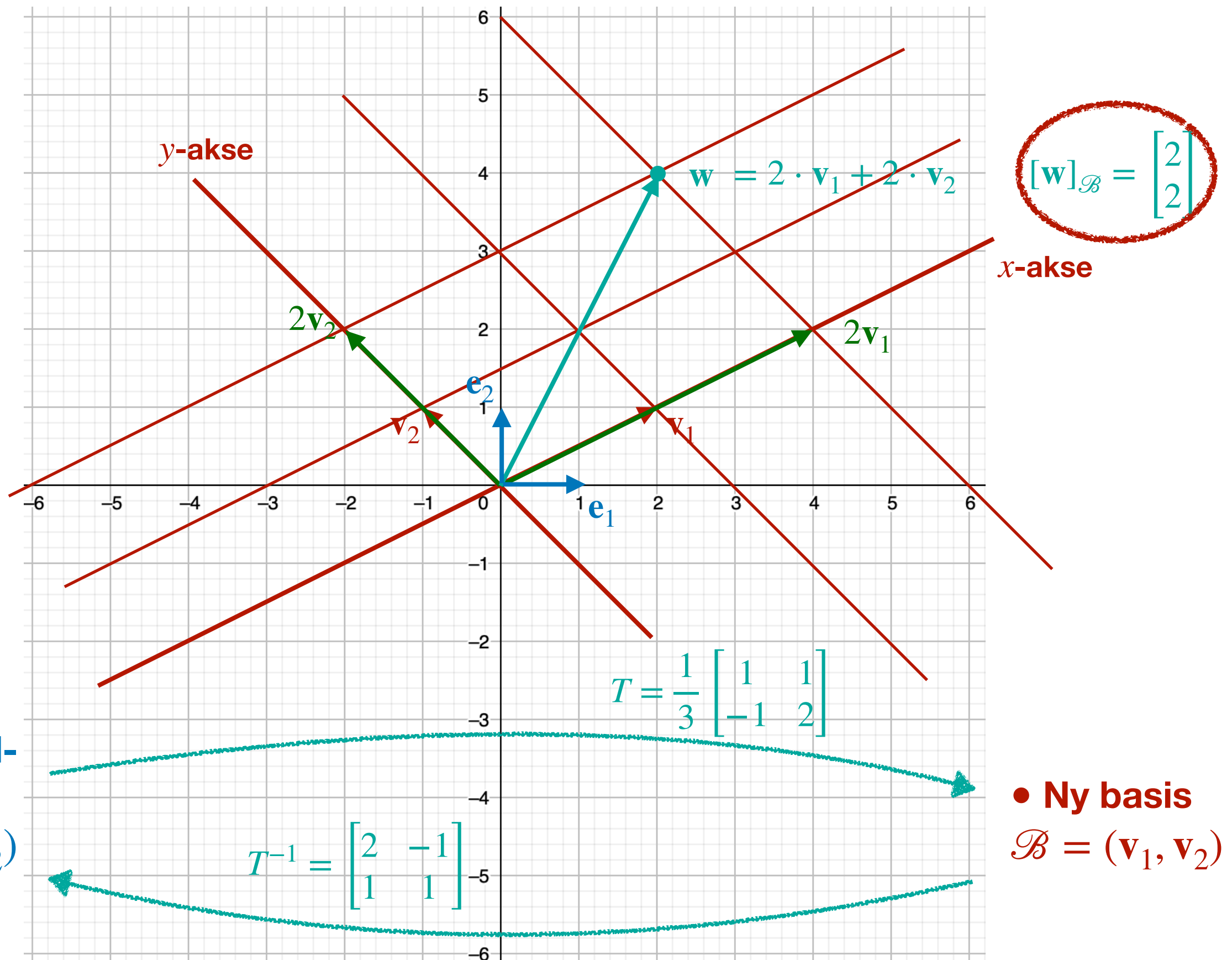
- Ny basis

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$



Alle punkter i planet
har $\mathcal{B}$ -koordinater!

Koordinater i $\mathbb{R}^2$



Koordinater i $\mathbb{R}^2$

mer om dette i det neste kapitlet ...

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = T \cdot [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} = T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} = T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ fordi } \mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2$$

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{E}} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ fordi } \mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2$$

$$T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lineærtransformasjon

• Standard-basis

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

• Ny basis

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$