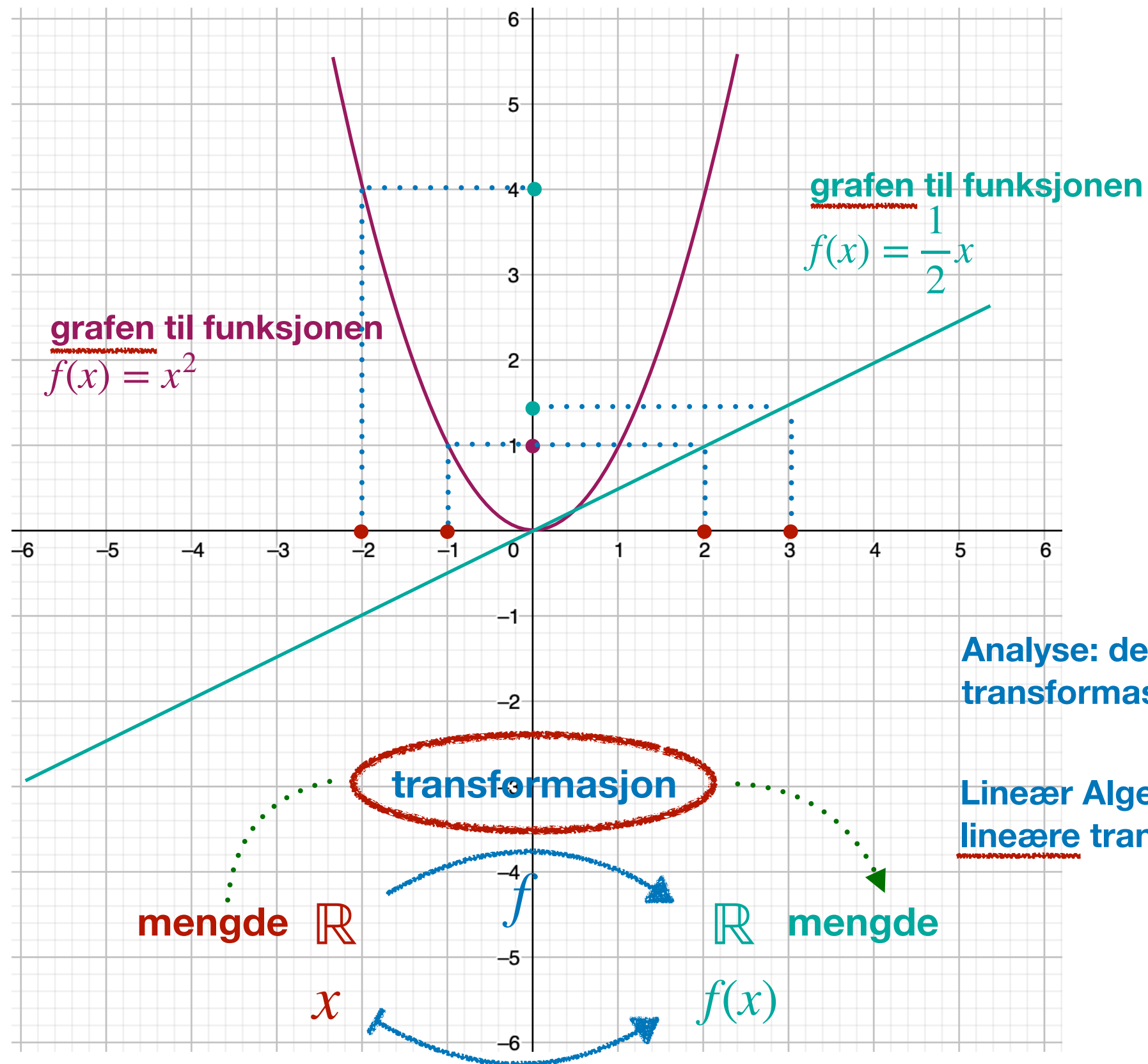


Matematikk 3

Lineærtransformasjoner - Introduksjon

Reelle funksjoner



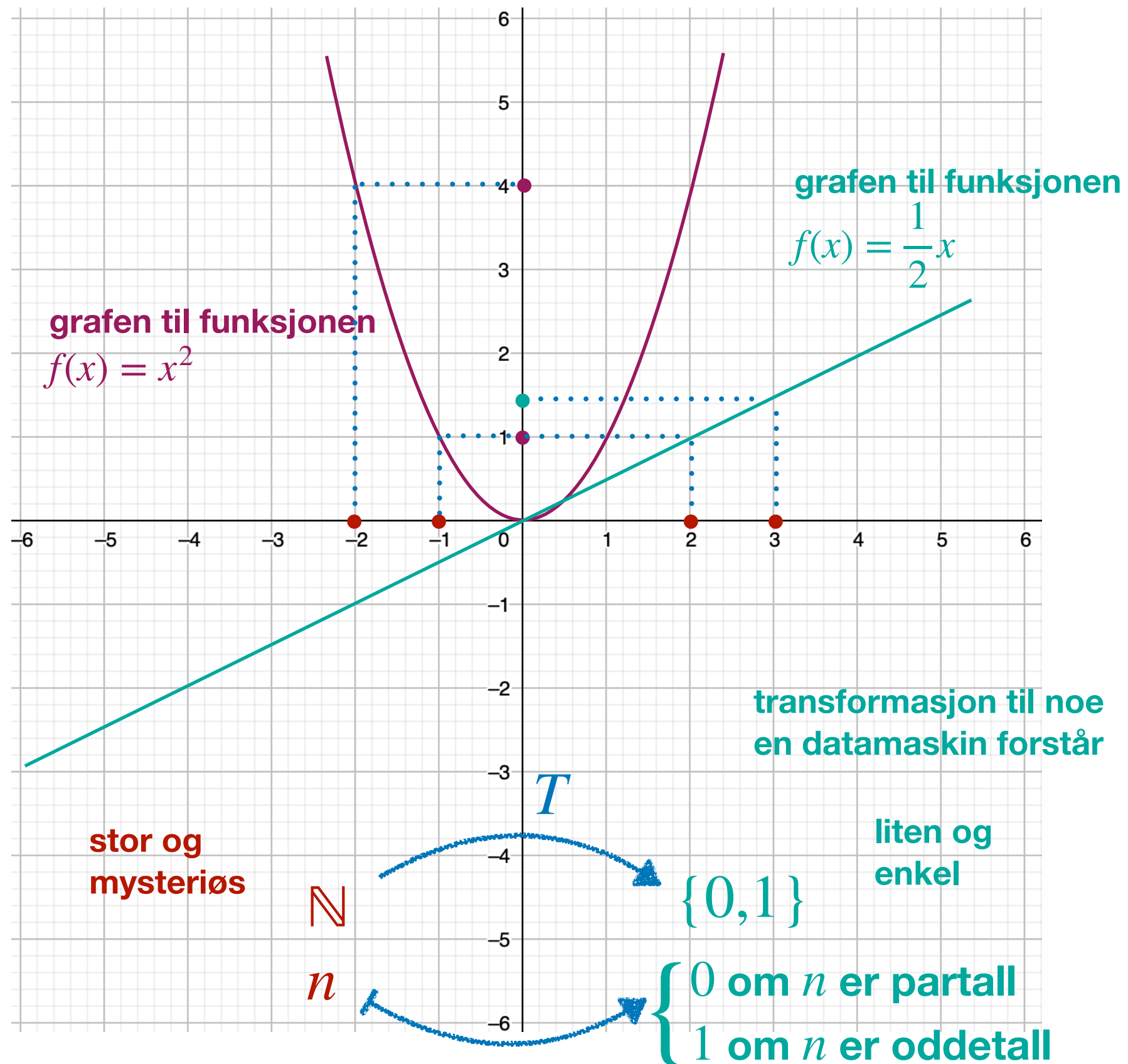
en annen måte
å tenke på
funksjoner

Analyse: deriverbare
transformasjoner

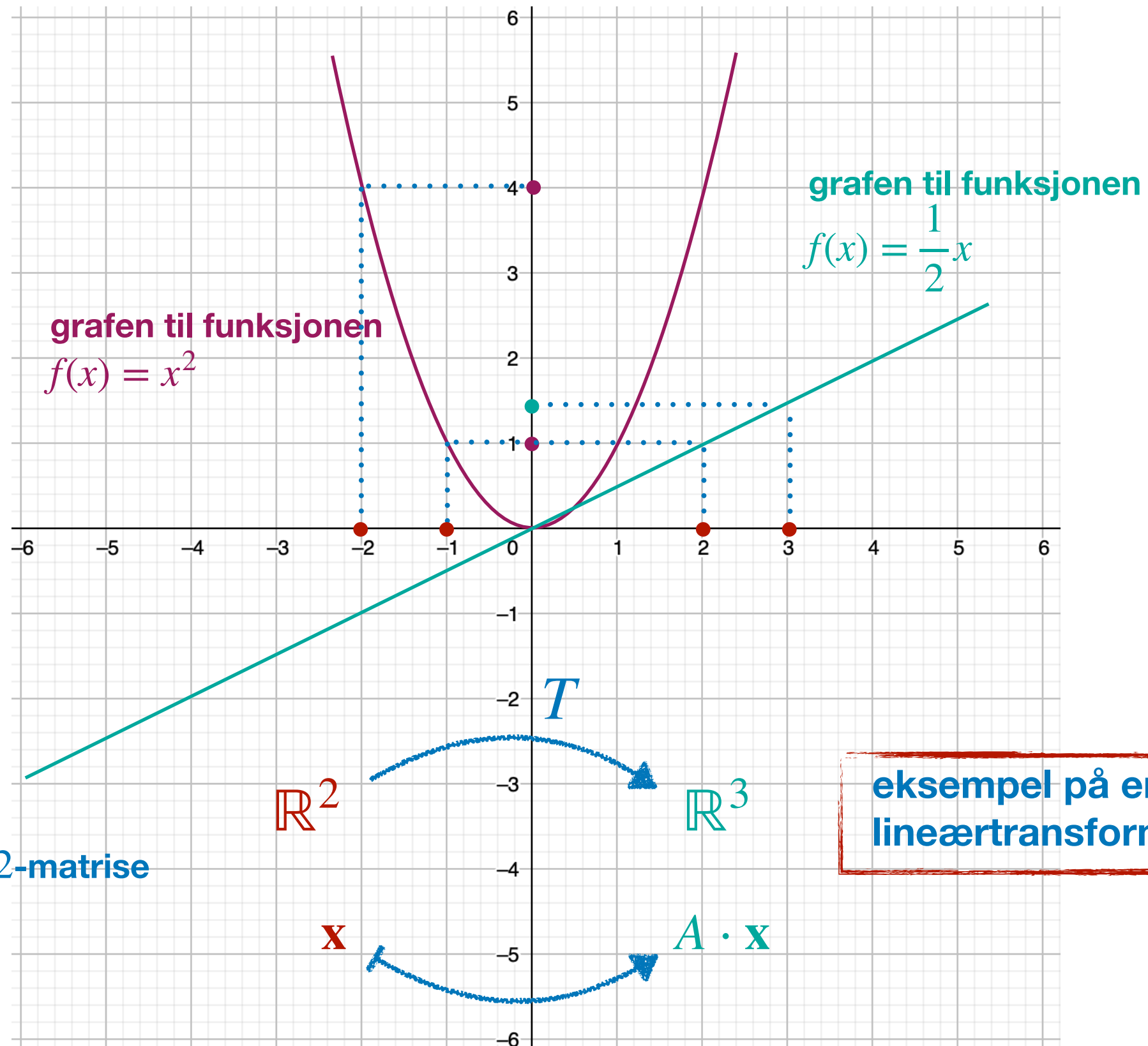
Lineær Algebra:
lineære transformasjoner

Andre eksempler

en annen måte
å tenke på
funksjoner



Eksempler



grafen til funksjonen
 $f(x) = x^2$

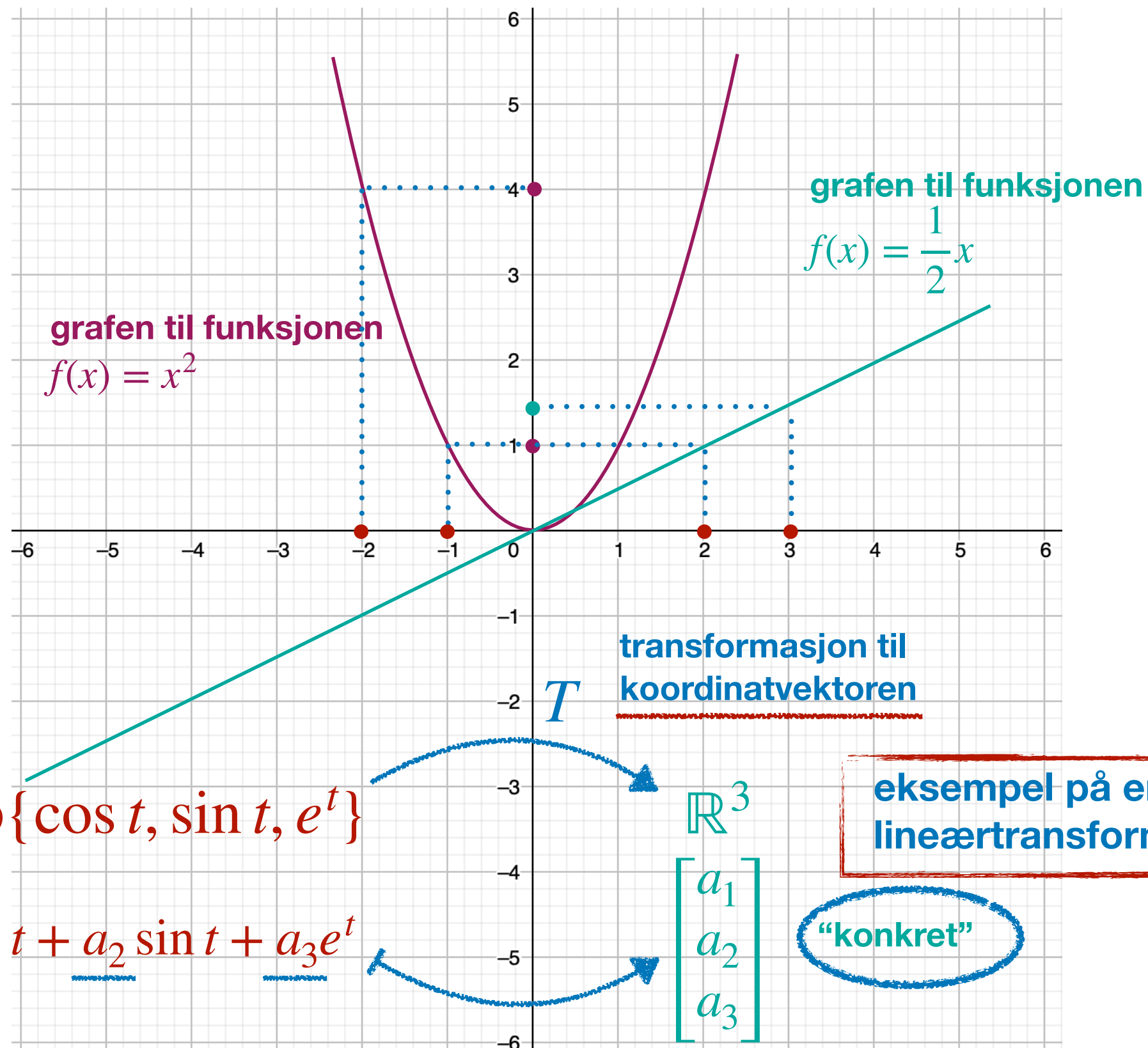
grafen til funksjonen
 $f(x) = \frac{1}{2}x$

en annen måte
å tenke på
funksjoner

A en reell 3×2 -matrise

eksempel på en
lineærtransformasjon

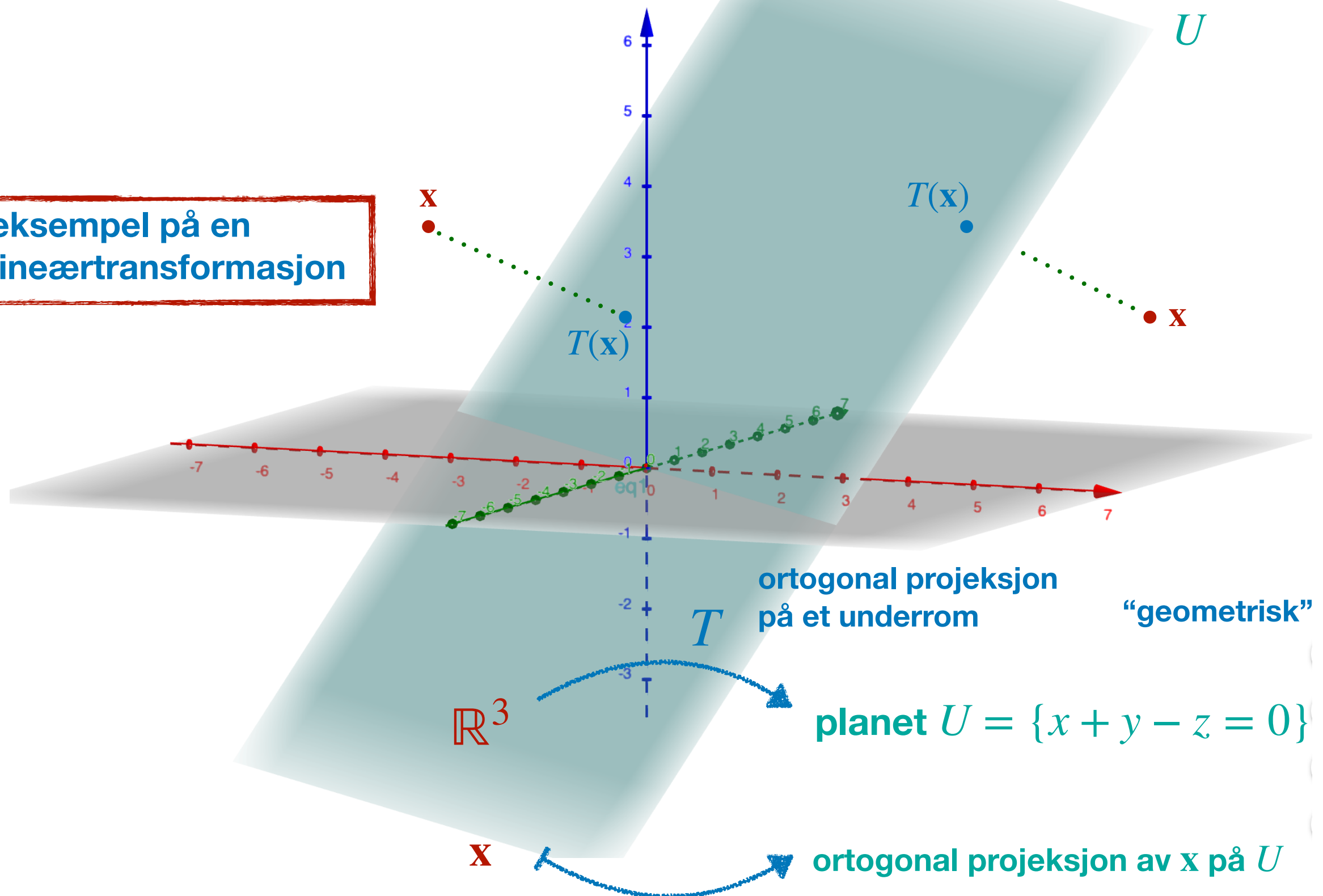
Eksempler



en annen måte
å tenke på
funksjoner

Eksempler

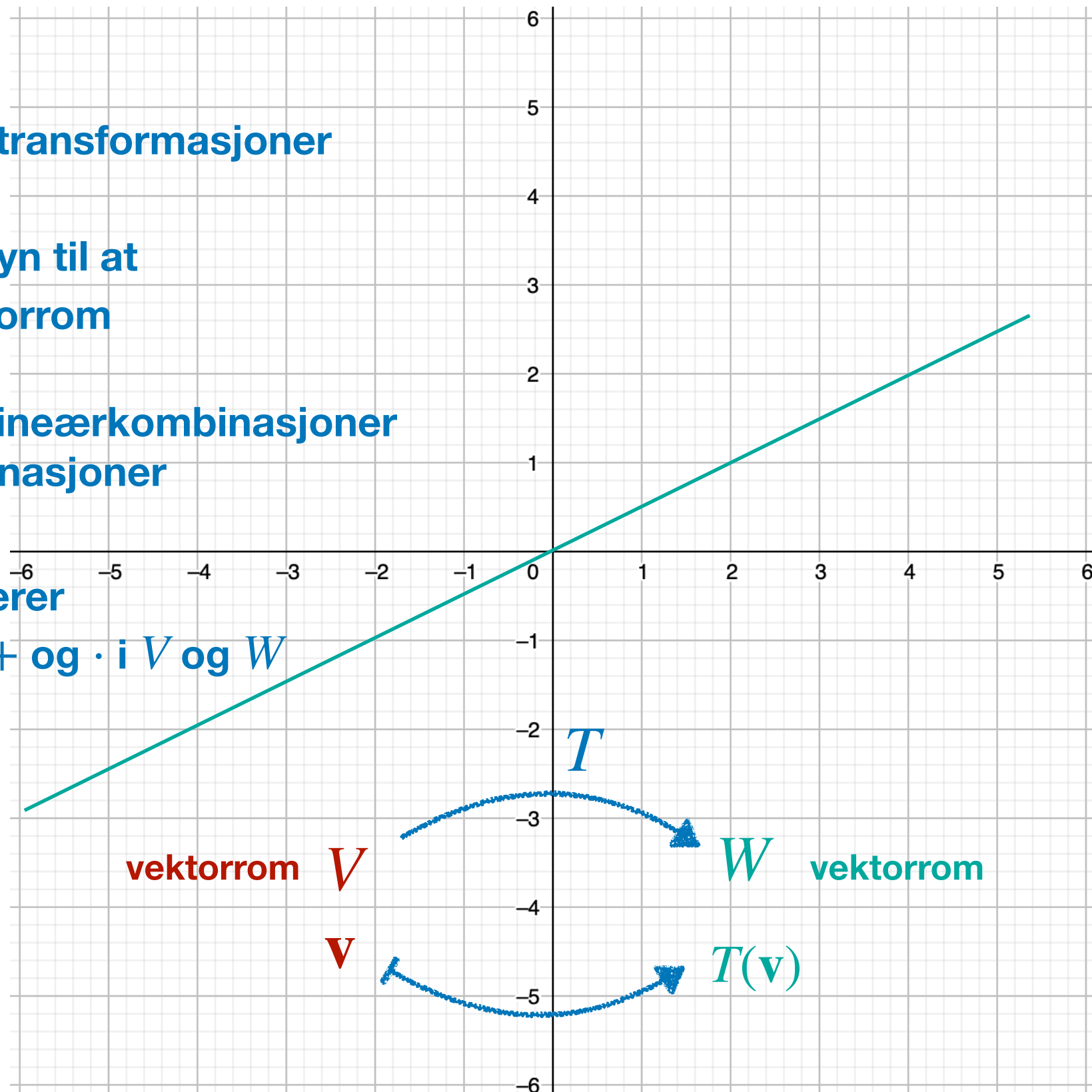
eksempel på en
lineærtransformasjon



Lineærtransformasjoner

Vi skal studere transformasjoner

- som tar hensyn til at V og W er vektorrom
- som sender lineærkombinasjoner til lineærkombinasjoner
- som respekterer operasjonene $+$ og $\cdot$ i V og W



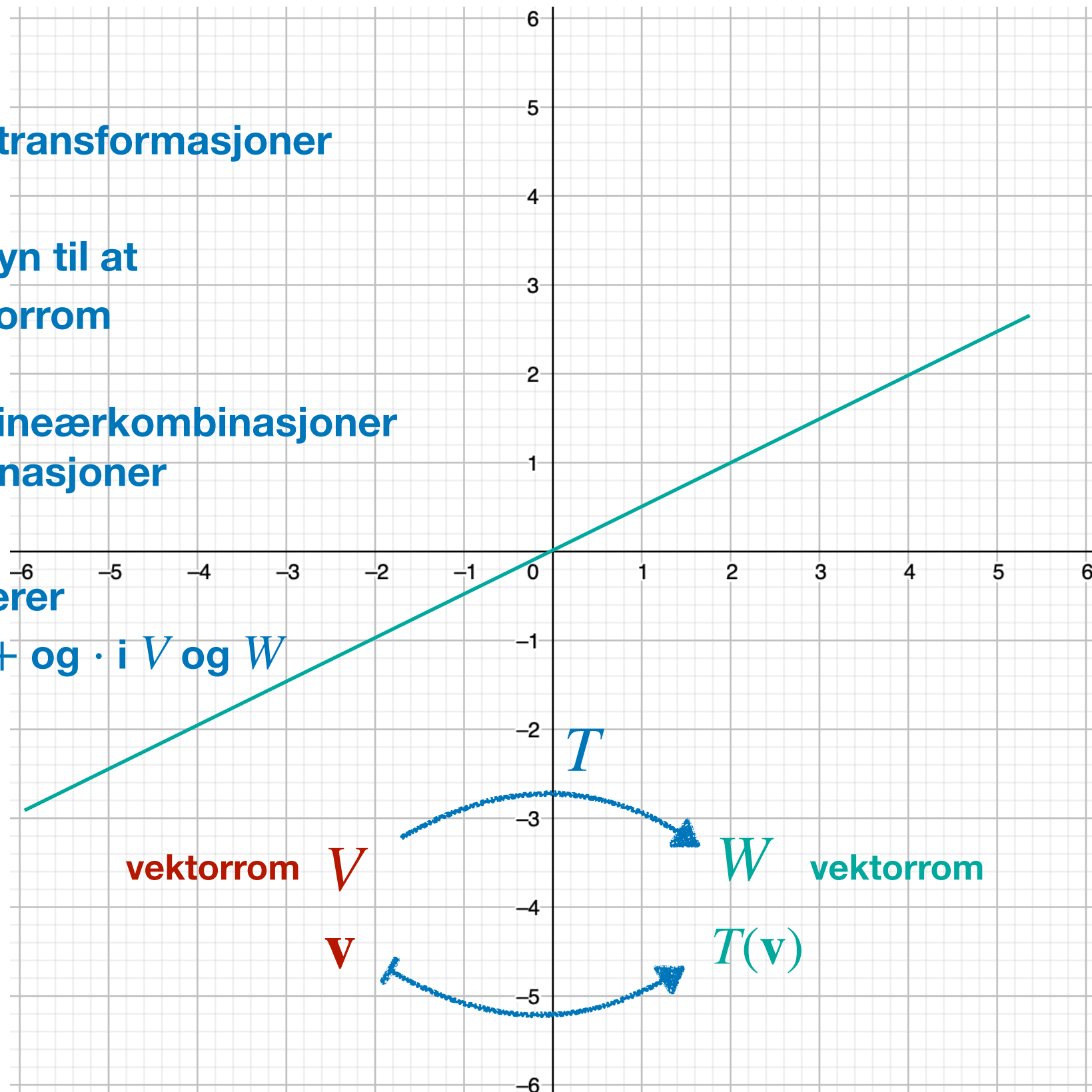
Matematikk 3

Lineærtransformasjoner - Definisjon og Eksempler

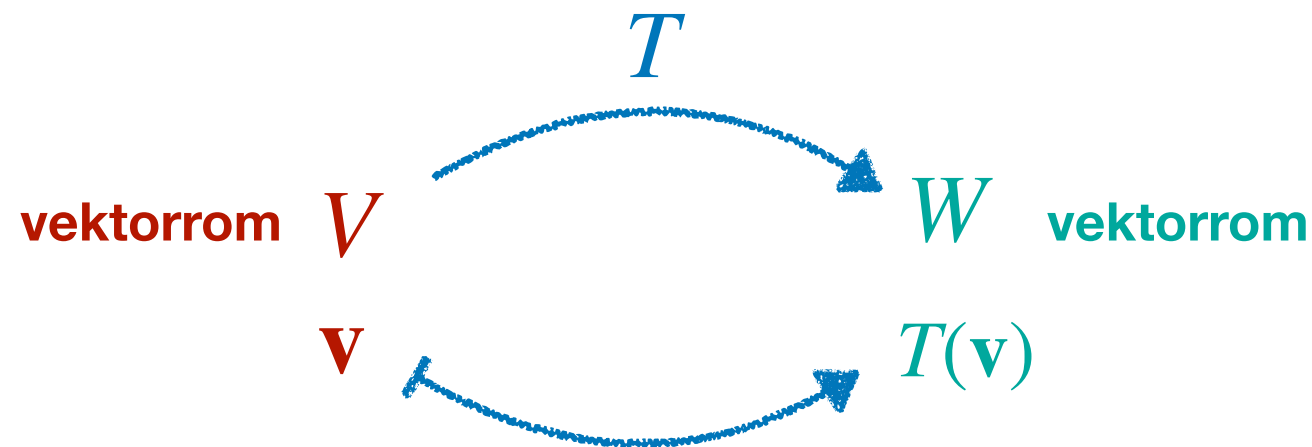
Lineærtransformasjoner

Vi skal studere transformasjoner

- som tar hensyn til at V og W er vektorrom
- som sender lineærkombinasjoner til lineærkombinasjoner
- som respekterer operasjonene $+$ og $\cdot$ i V og W



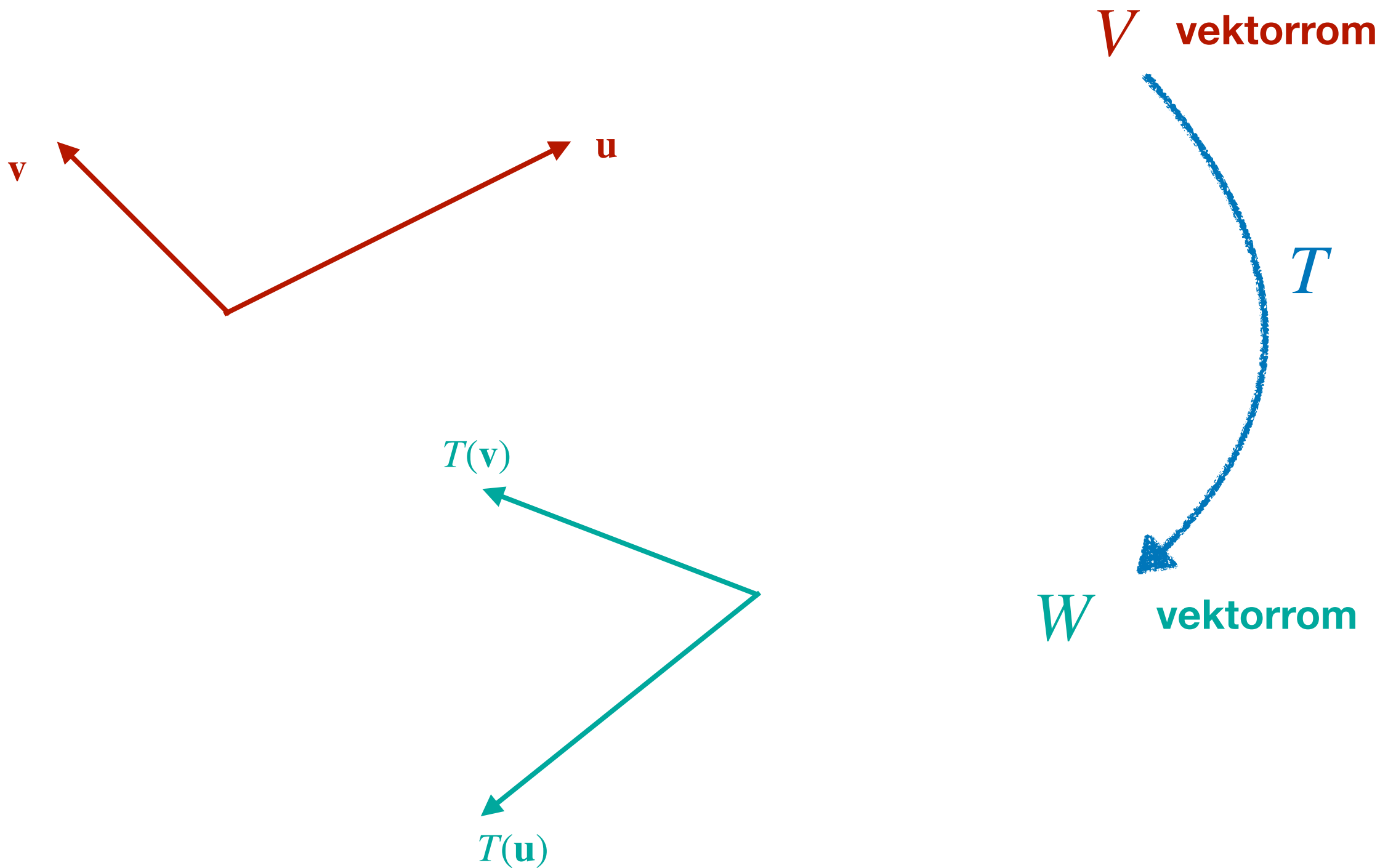
Lineærtransformasjoner



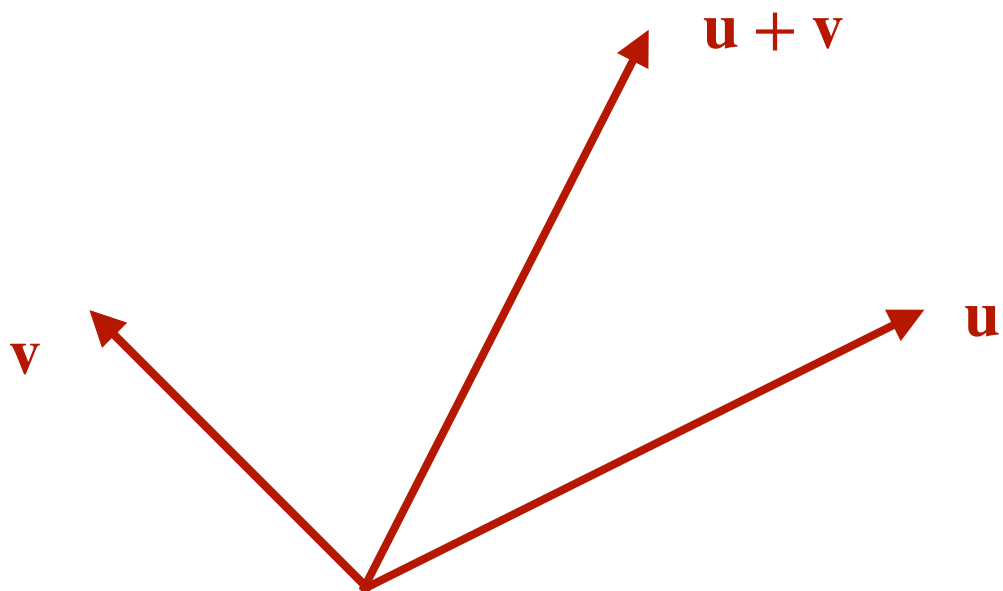
Vi sier at T er en **lineærtransformasjon** dersom

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V
- $T(a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot T(\mathbf{v})$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i V og alle tall a

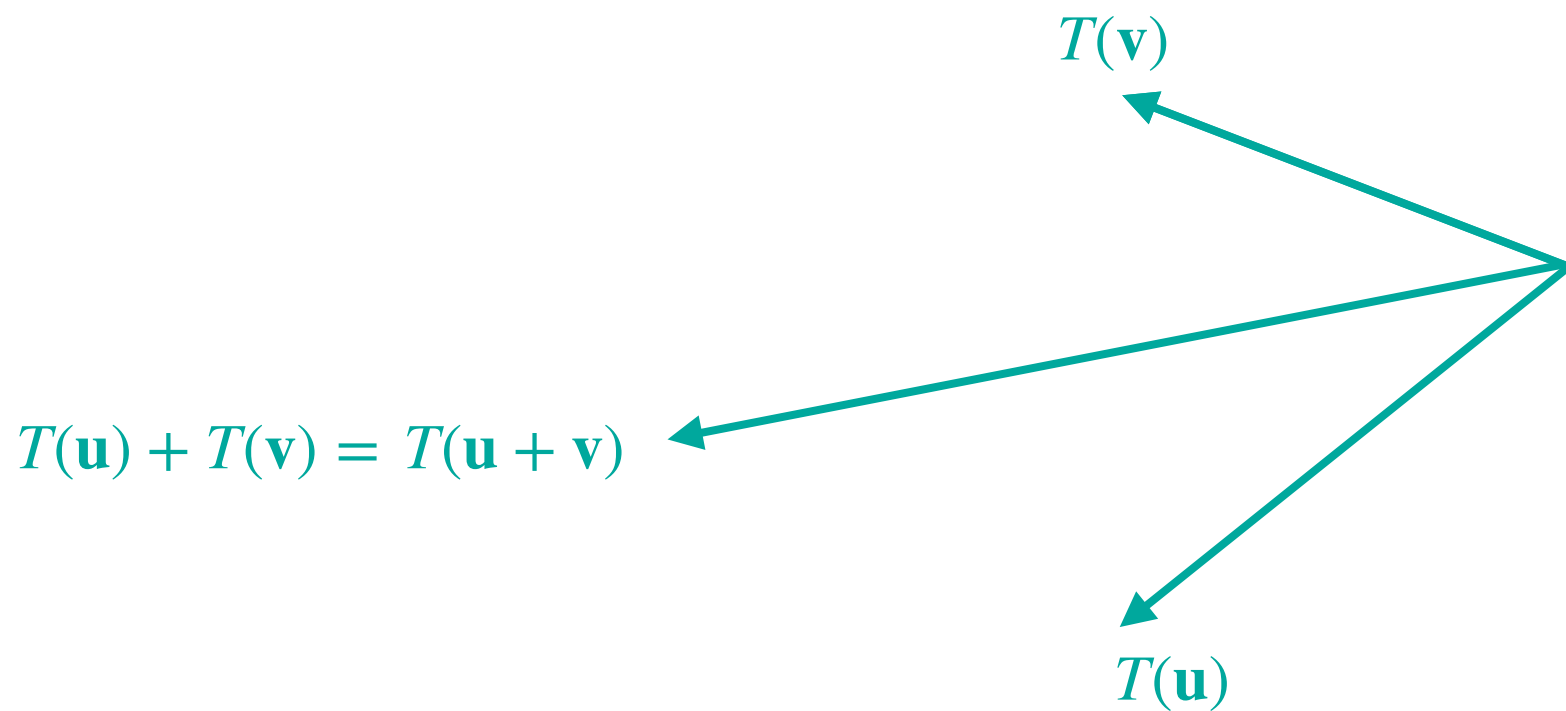
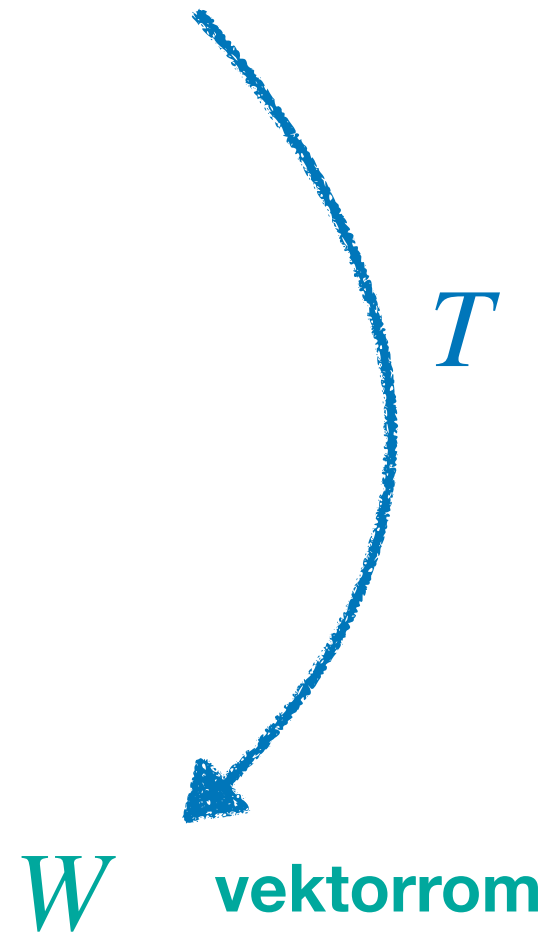
Lineærtransformasjoner



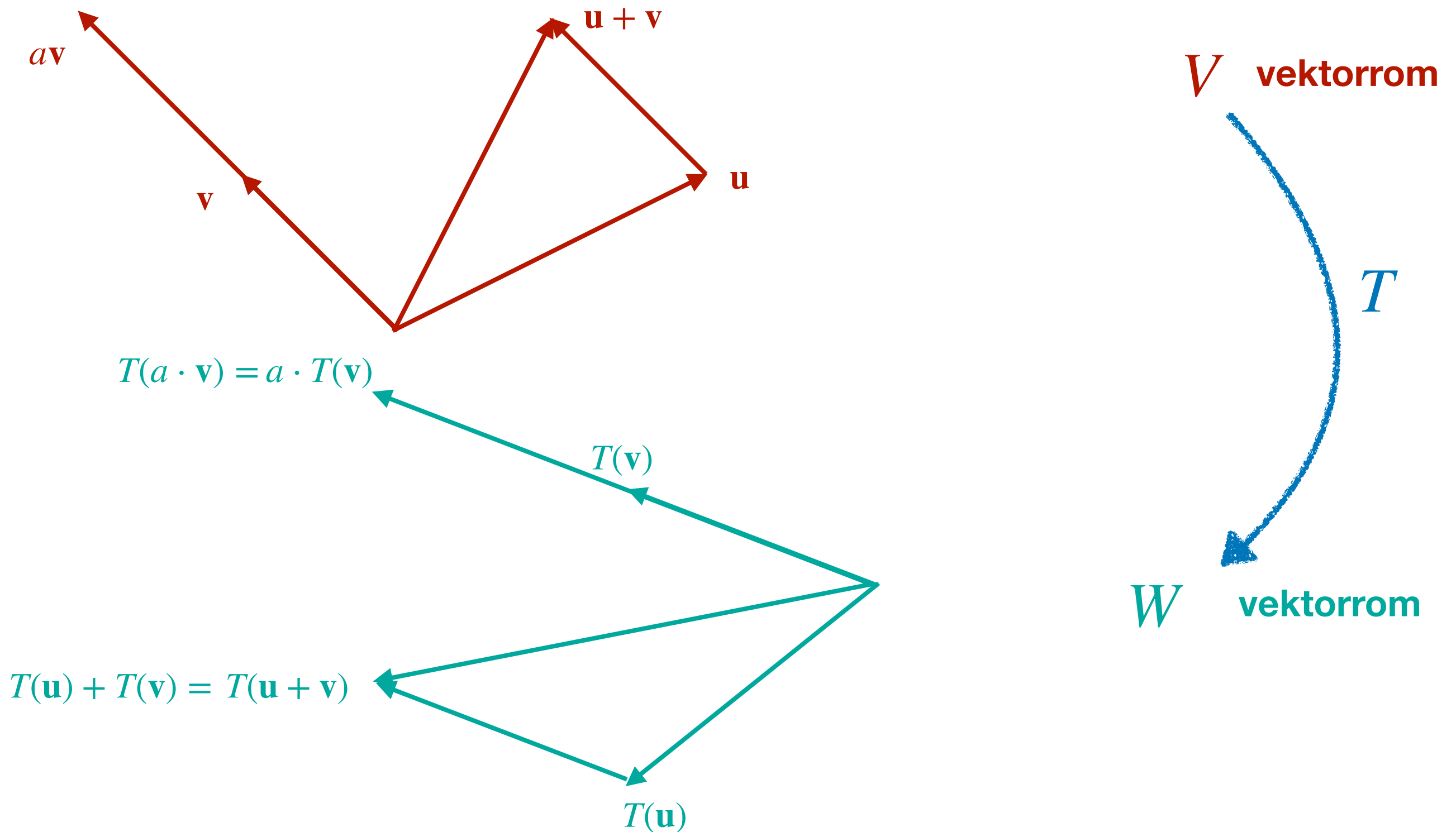
Lineærtransformasjoner



V vektorrom



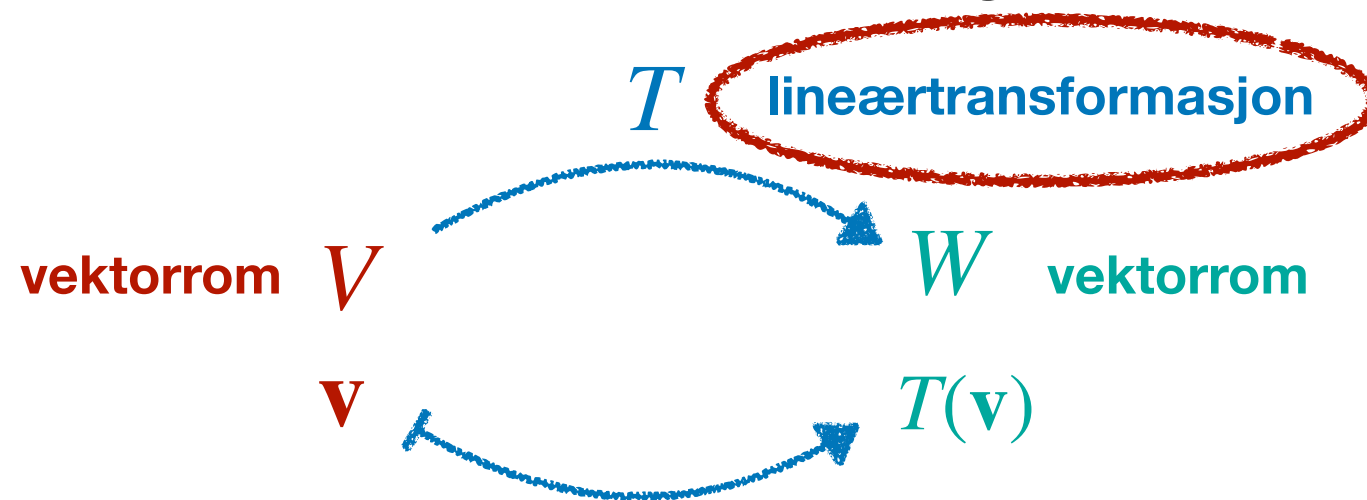
Lineærtransformasjoner



Lineærtransformasjoner

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

- $T(a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot T(\mathbf{v})$



T sender **nullvektoren i V** til **nullvektoren i W** :

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \quad \text{fordi } T(\mathbf{0}_V) = T(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$$

T sender **lineærkombinasjoner i V** til **lineærkombinasjoner i W** :

$$T(a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

Eksempler

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 = V & \xrightarrow{T} & W = \mathbb{R}^3 \\
 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 \\ -3v_1 + 2v_2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

T er en **lineærtransformasjon** fordi

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) \\ -3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 \\ -3u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 \\ -3v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \quad \checkmark \\
 \bullet \quad T\left(a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a(v_1 - v_2) \\ av_1 \\ a(-3v_1 + 2v_2) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 \\ -3v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} = a \cdot T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Eksempler

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 = V & \xrightarrow{T} & W = \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - 2 \\ -3v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

T er ikke en lineærtransformasjon fordi

$$\bullet T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

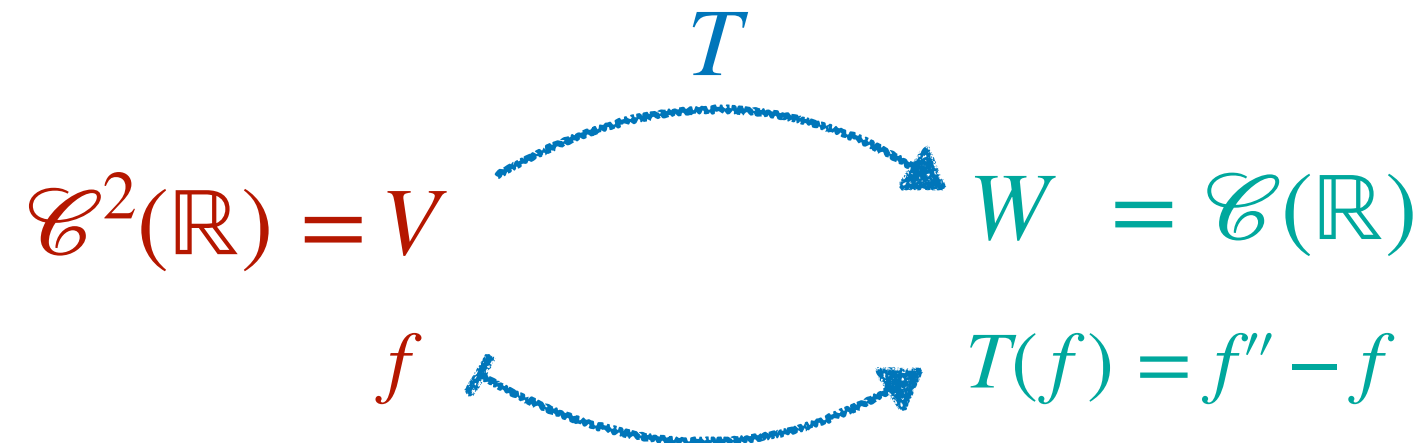
Eksempler

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 = V & \xrightarrow{T} & W = \mathbb{R}^3 \\ \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] & \xrightarrow{\quad} & T \left(\left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2^2 \\ v_3^3 \end{array} \right] \end{array}$$

T er **ikke** en lineærtransformasjon fordi

$$\bullet T \left(2 \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 2v_1 \\ 4v_2^2 \\ 8v_3^3 \end{array} \right] \neq 2 \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2^2 \\ v_3^3 \end{array} \right] = 2T \left(\left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] \right) \quad \text{om } v_2 \neq 0 \text{ eller } v_3 \neq 0$$

Eksempler



T er en **lineærtransformasjon** fordi

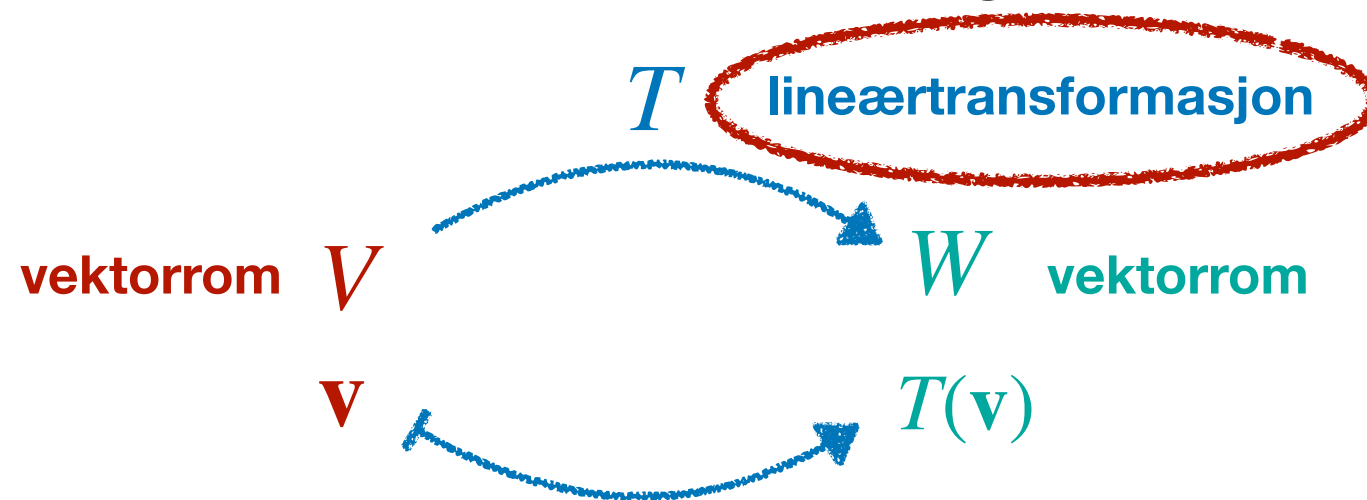
- $T(f + g) = (f + g)'' - (f + g) = f'' - f + g'' - g = T(f) + T(g)$ ✓
- $T(a \cdot f) = (a \cdot f)'' - (a \cdot f) = a \cdot (f'' - f) = a \cdot T(f)$ ✓

Matematikk 3

Lineærtransformasjoner og Matriser

Lineærtransformasjoner

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot T(\mathbf{v})$



Anta at $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ er en basis for V .

Teorem: Da er T fullstendig bestemt av vektorene $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$.

fordi:

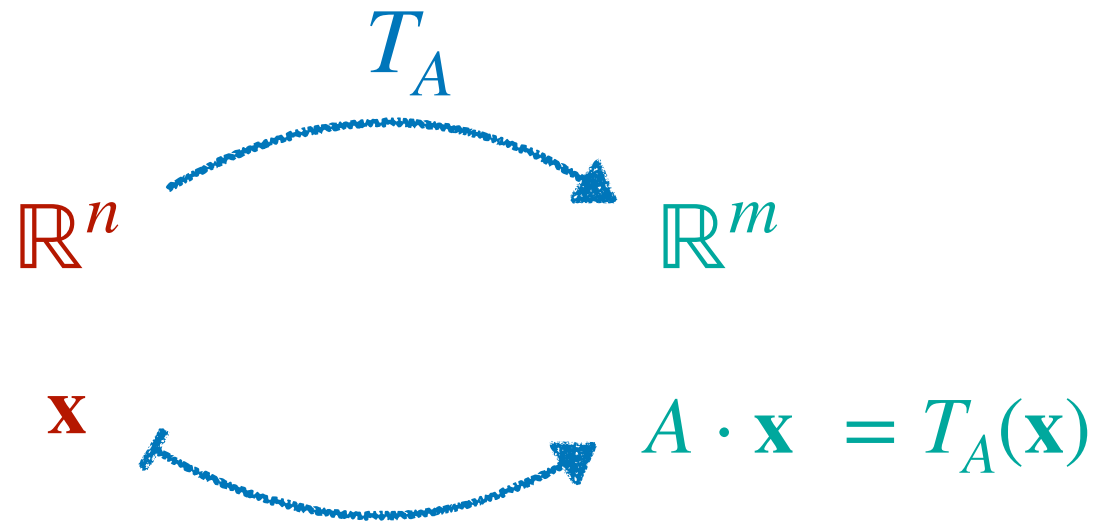
La $\mathbf{v}$ være en tilfeldig vektor i V . Da finnes det tall $a_1, \dots, a_n$ med

$$\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$T(\mathbf{v}) = T(a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

Lineærtransformasjoner

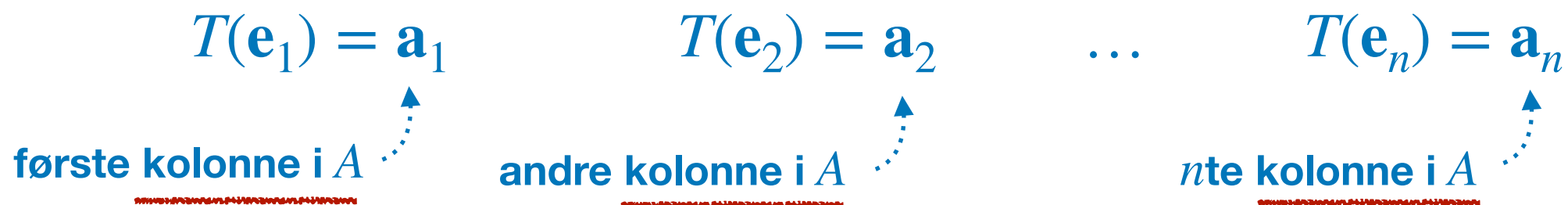
A en reell $m \times n$ -matrise



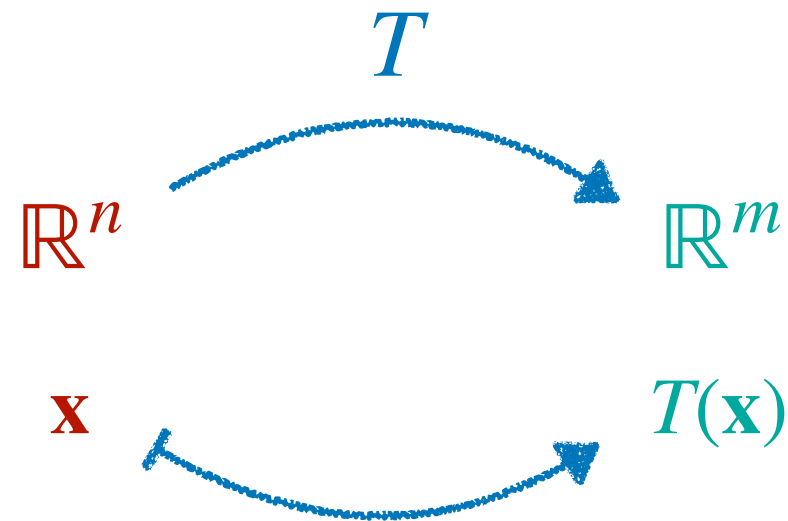
T_A er en lineærtransformasjon fordi

- $A \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{y}$ ✓
- $A \cdot (a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot (A \cdot \mathbf{x})$ ✓

La $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^n$.



Lineærtransformasjoner



Anta at T er en **lineærtransformasjon**:

Da kan vi definere en $m \times n$ -matrise A slik at

vi kaller A
standardmatrisen til T

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} \text{ for alle } \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

vi definerer kolonne i A :

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1$$

første kolonne i A

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2$$

andre kolonne i A

...

$$T(\mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_n$$

n te kolonne i A

Eksempler

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 = V & \xrightarrow{T} & W = \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{T} & T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 \\ -3v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hva er standardmatrisen til T ?

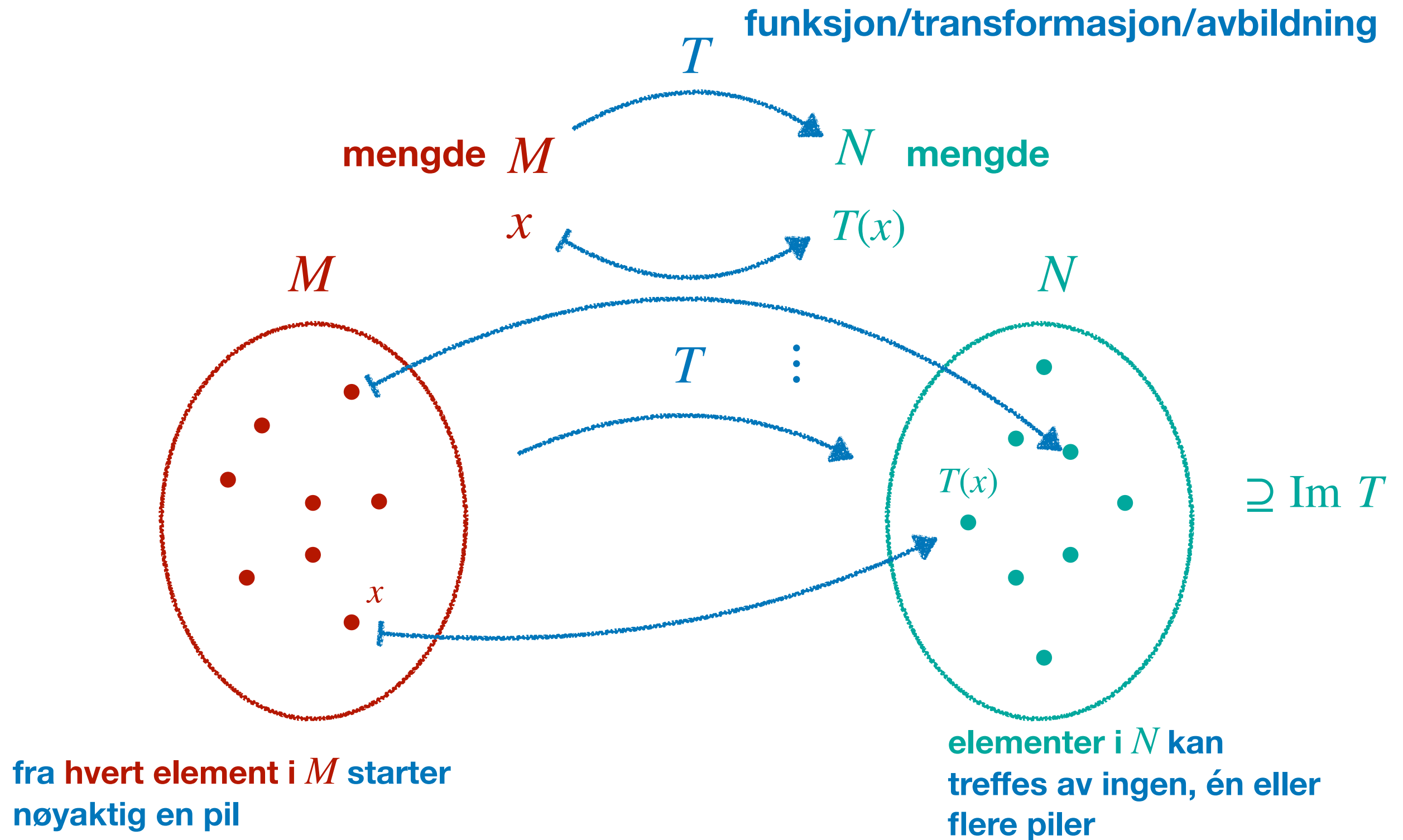
$$\bullet T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \bullet T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matematikk 3

Lineærtransformasjoner - Kjerne og Bilde

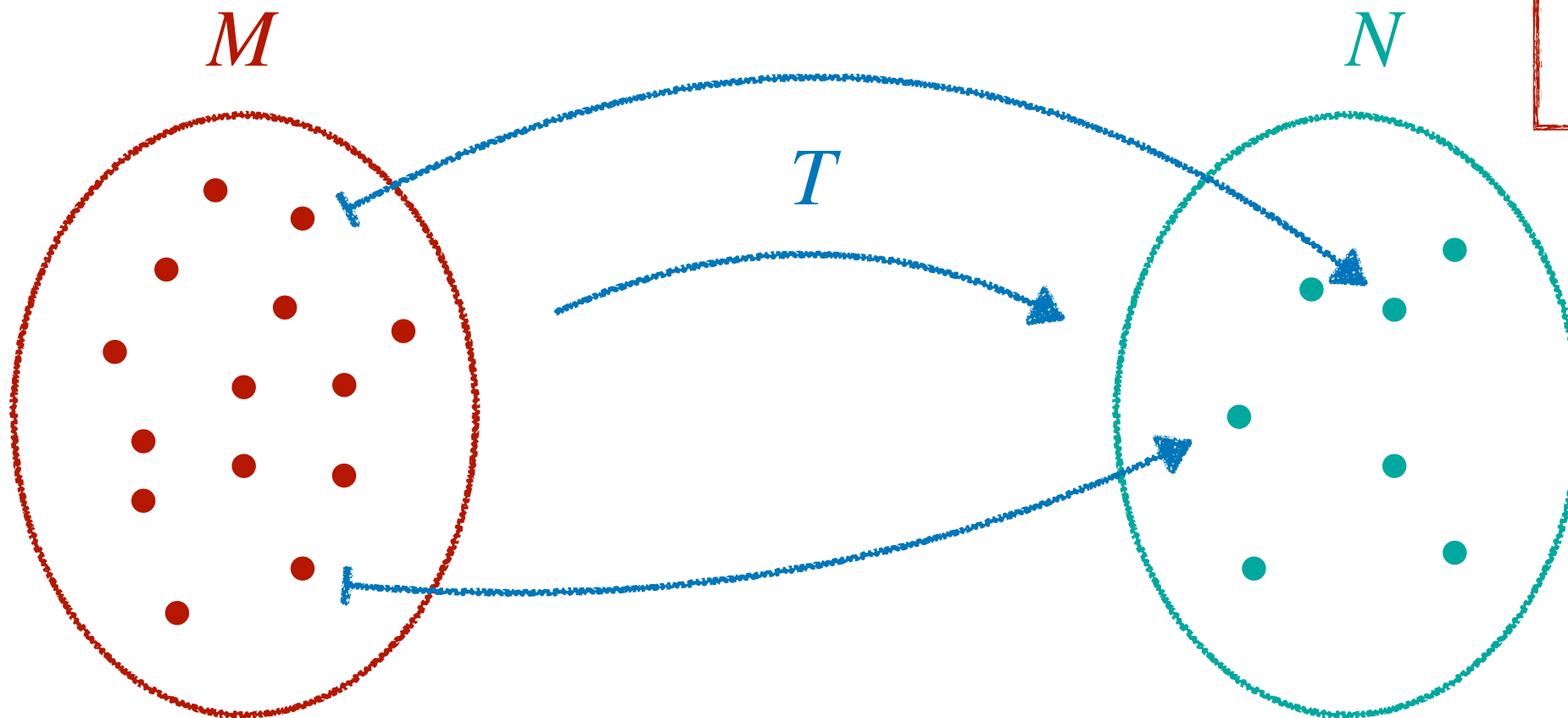
Egenskaper av funksjoner



Vi definerer **bildet til T** som mengden av elementene i N som treffes av minst én pil.

Egenskaper av funksjoner

Hvis M, N
endelige
mengder:
 $\#M \geq \#N$



Vi sier at T er **surjektiv** dersom • **hvert element i N treffes av minst én pil.**

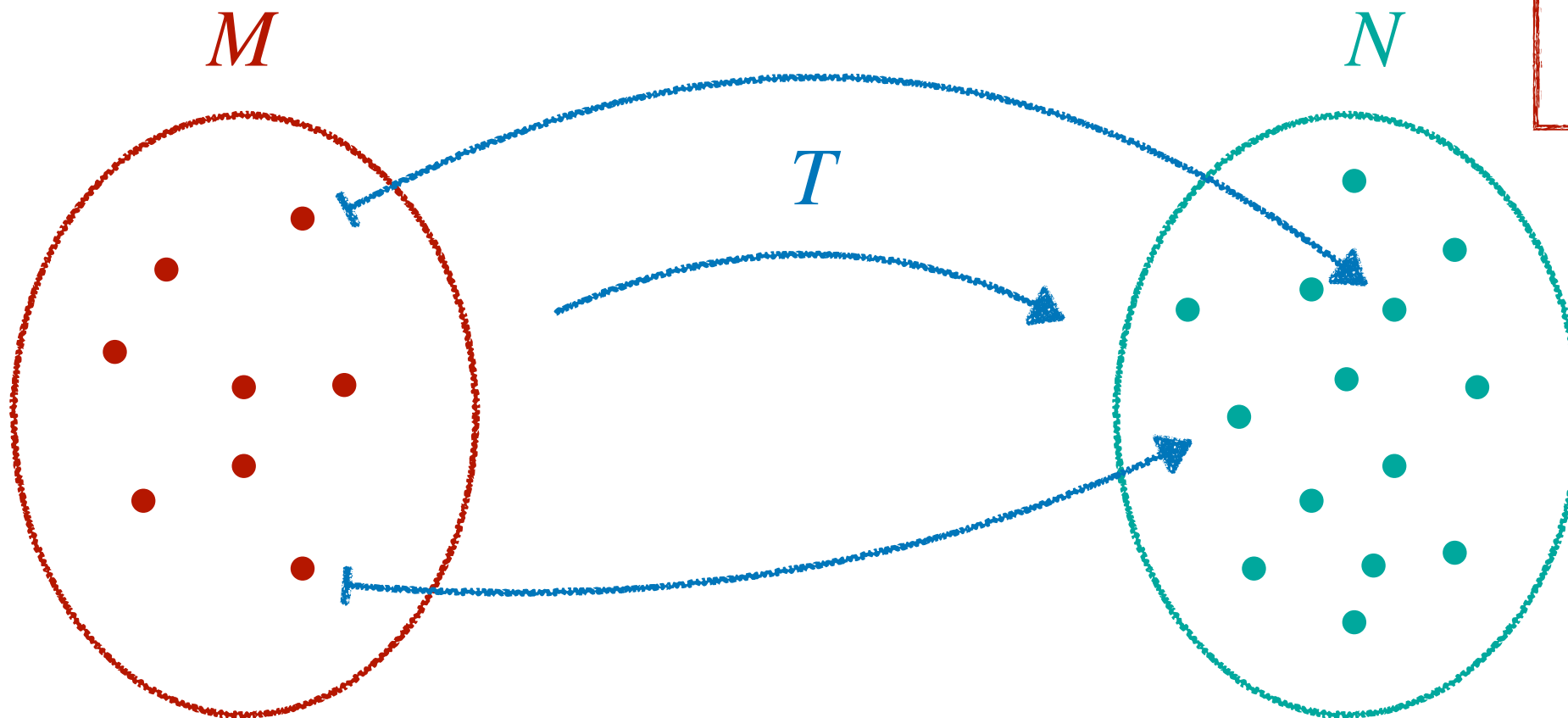
- for hvert y i N finnes det minst én x i M med $T(x) = y$.

én eller flere

- dersom $\text{Im } T = N$.

Egenskaper av funksjoner

Hvis M, N
endelige
mengder:
 $\#M \leq \#N$



Vi sier at T er **injektiv** dersom • **hvert element i N treffes av maksimalt én pil.**

- for hvert y i N finnes det maksimalt én x i M med $T(x) = y$.

..... muligens ikke noe x i det hele tatt

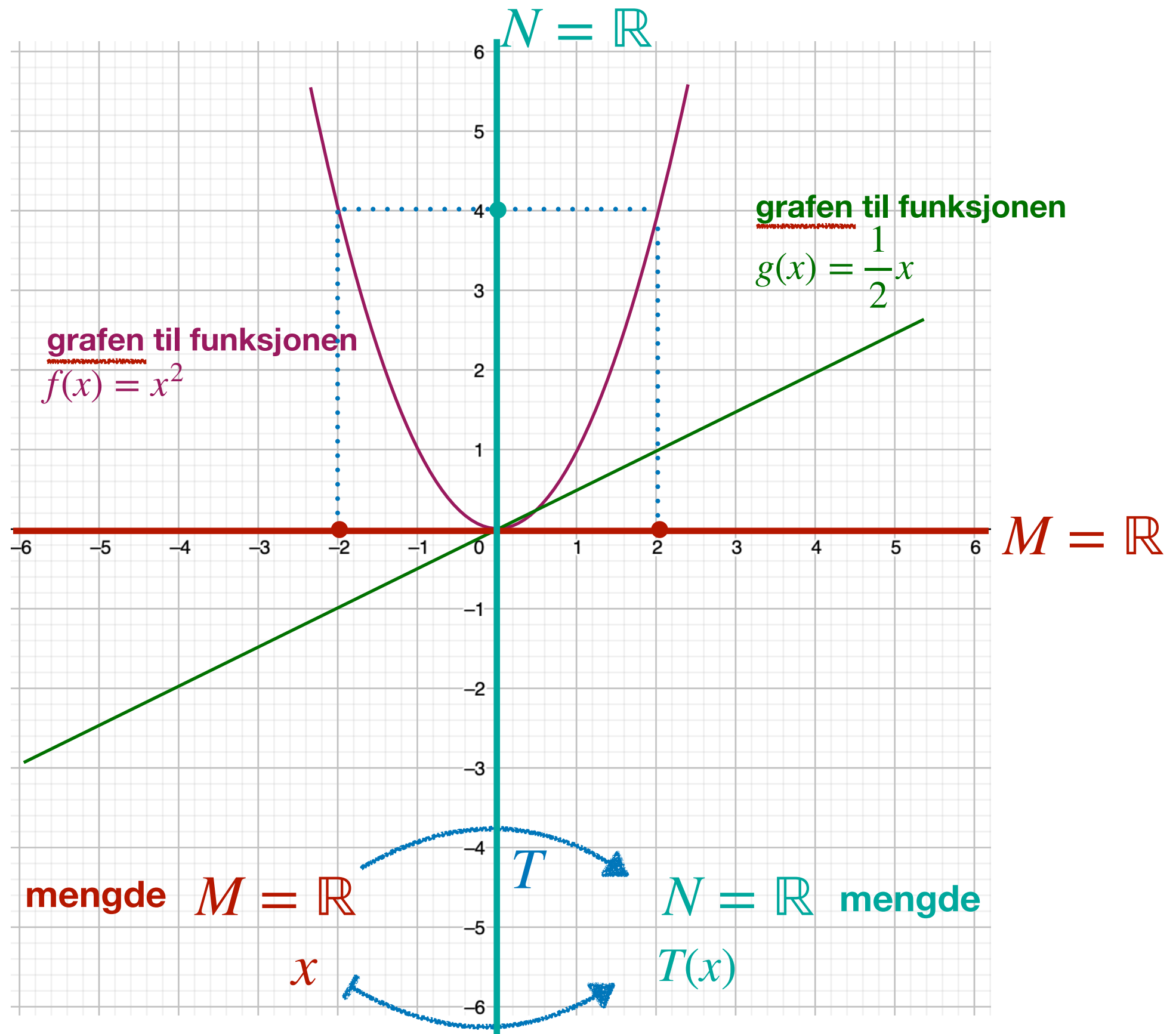
- dersom $T(x_1) = T(x_2)$ i N , så må vi ha $x_1 = x_2$ i M .

impliserer

Eksempel

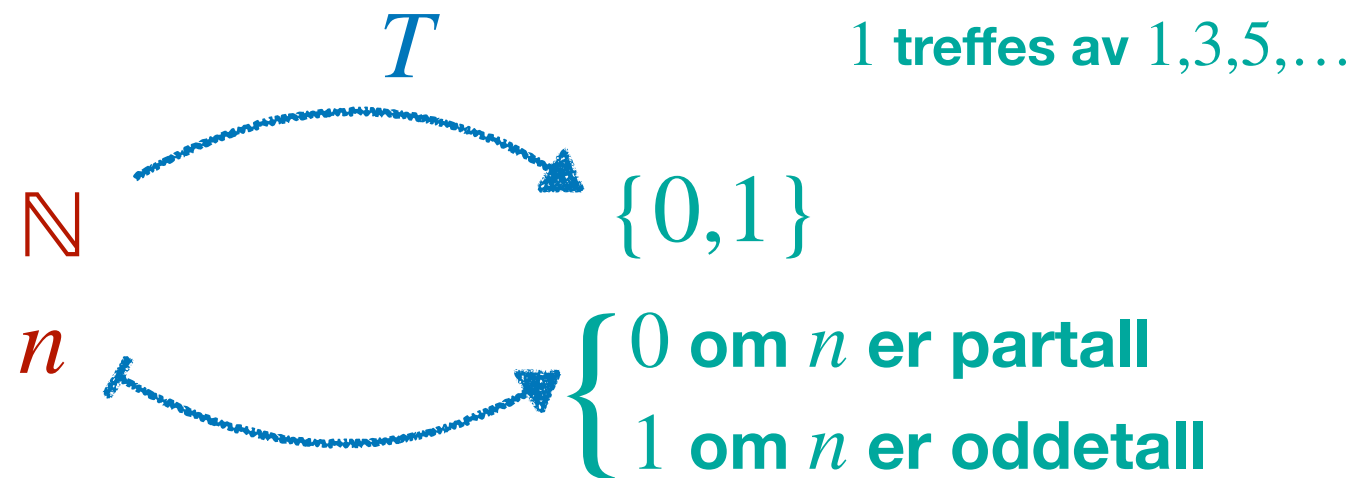
f er hverken
injektiv eller
surjektiv

**g er både
injektiv og
surjektiv**



Eksempel

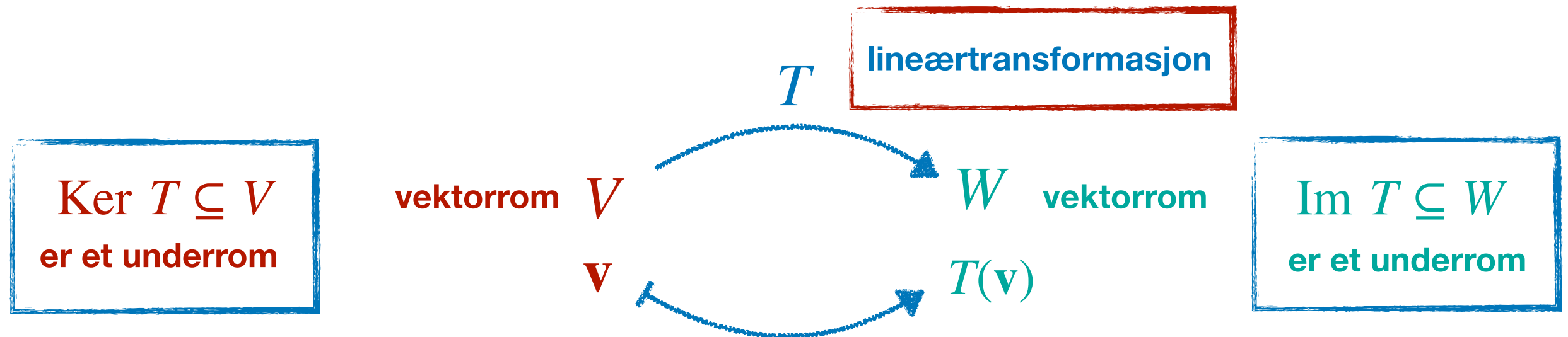
T er surjektiv,
men ikke injektiv



T er injektiv,
men ikke surjektiv



Lineærtransformasjoner



Vi har allerede definert bildet til T :

- $\text{Im } T = \{\text{alle } w \text{ i } W \text{ slik at det finnes minst én } v \text{ med } w = T(v)\}$

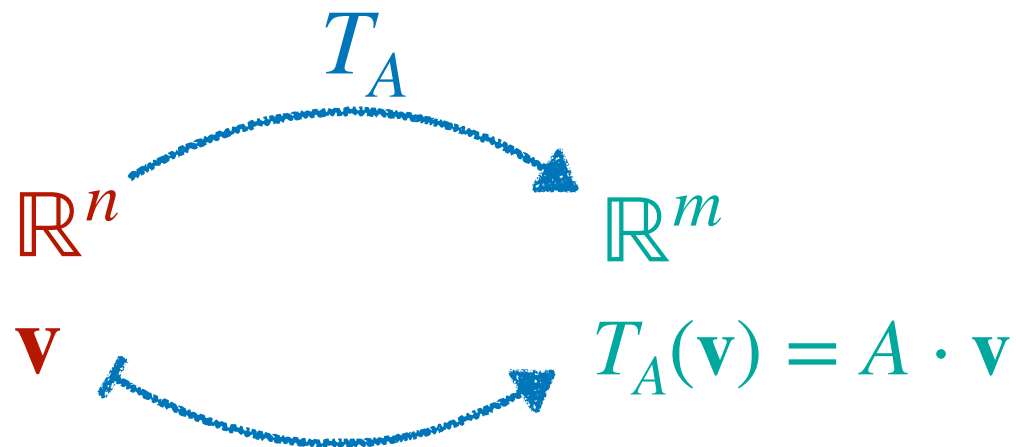
Nå definerer vi en ny mengde, kjernen til T :

- $\text{Ker } T = \{\text{alle } v \text{ i } V \text{ slik at } T(v) = \mathbf{0}\}$

Både $\text{Ker } T$
og $\text{Im } T$
alltid
inneholder
nullvektoren

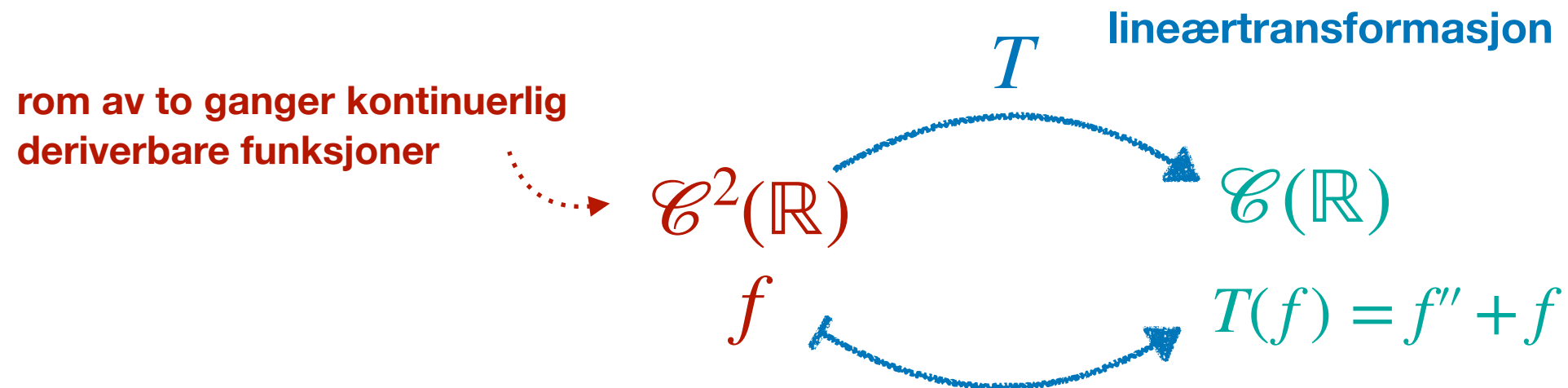
Lineærtransformasjoner

A en reell $m \times n$ -matrise



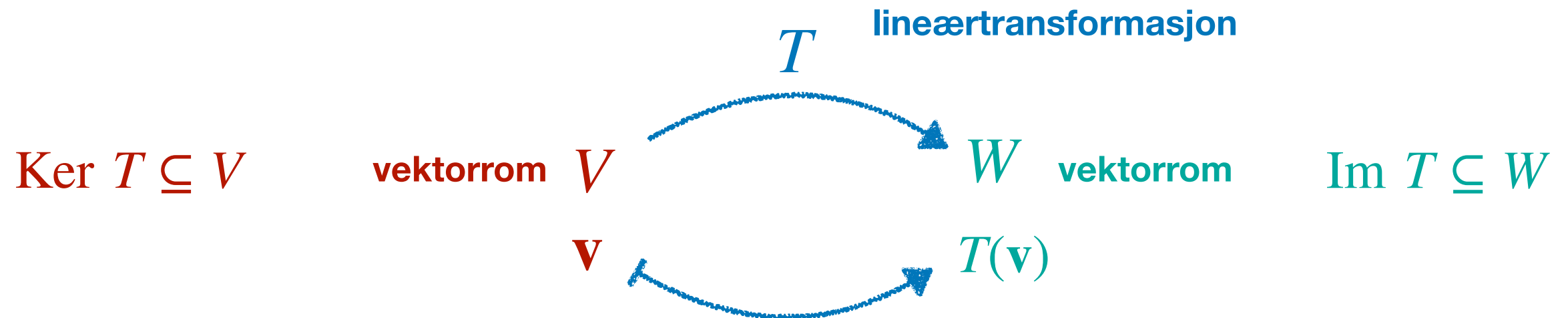
- $\text{Im } T_A$ = $\{\text{alle } \mathbf{w} \text{ i } \mathbb{R}^m \mid \text{det finnes minst én } \mathbf{v} \text{ med } T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$
= $\{\text{alle } \mathbf{w} \text{ i } \mathbb{R}^m \mid \text{det finnes minst én } \mathbf{v} \text{ med } A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}\}$
= $\text{Col } A$
- $\text{Ker } T_A$ = $\{\text{alle } \mathbf{v} \text{ i } \mathbb{R}^n \mid T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
= $\{\text{alle } \mathbf{v} \text{ i } \mathbb{R}^n \mid A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$
= $\text{Null } A$

Eksempel: Differensialligninger



- $\text{Ker } T = \{\text{alle funksjoner } f \text{ i } V \text{ slik at } T(f) = f'' + f = 0\}$
 $= \text{løsningsmengden til differensialligningen } f'' + f = 0$

Lineærtransformasjoner



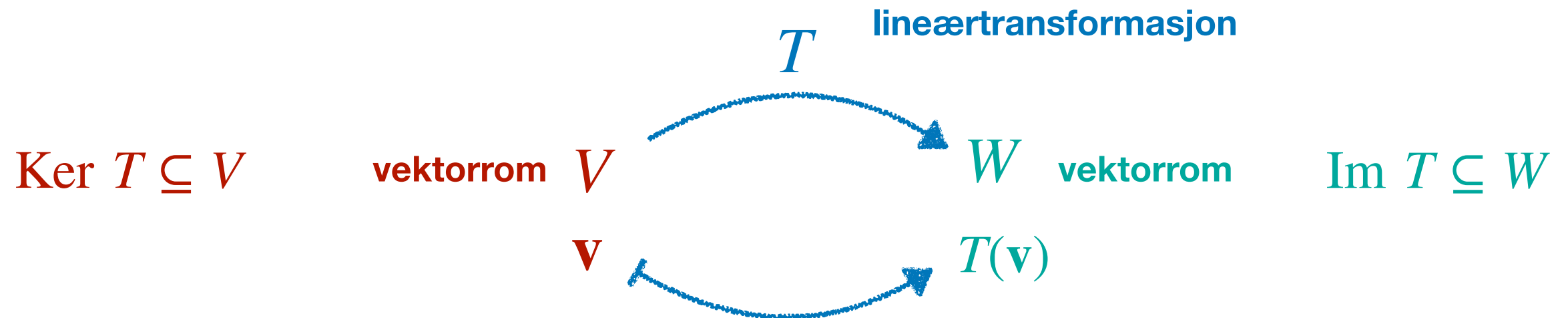
Vi har fremdeles: • T er surjektiv hvis og bare hvis $\text{Im } T = W$.

For en lineærtransformasjon T har vi også:

- T er injektiv hvis og bare hvis $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$.

må sjekke kun
én vektor!! 😎

Lineærtransformasjoner



- T er injektiv hvis og bare hvis $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$.

fordi:

- anta T er injektiv:

dersom $\mathbf{u} \in \text{Ker } T$, så har vi

$$\underline{T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}} = \underline{T(\mathbf{0})}$$

T injektiv

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- anta $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$:

$$\text{dersom } T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

W er et vektorrom

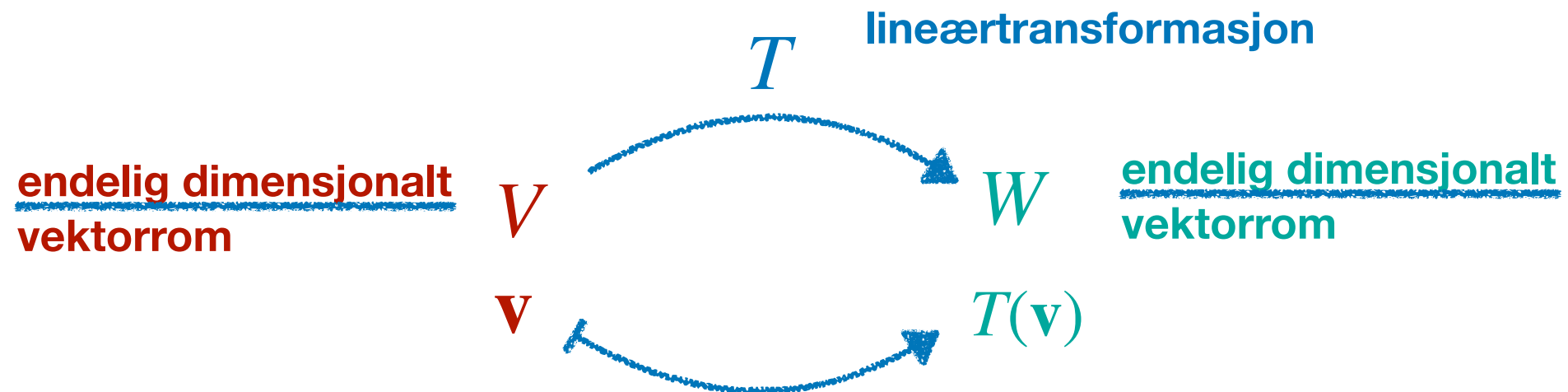
$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$$

T lineærtransformasjon

Lineærtransformasjoner



$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

- Dersom T er injektiv:

$$\dim V \leq \dim W$$

- Dersom T er surjektiv:

$$\dim V \geq \dim W$$

- Dersom T er både injektiv og surjektiv:

$$\dim V = \dim W$$

Matematikk 3

Lineærtransformasjoner og Basiser - Del 1

Lineærtransformasjoner

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

β

β er en lineærtransformasjon!

$\mathbb{R}^n$

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \beta(\mathbf{v})$$

anta $\dim V = n$

koordinatvektoren til $\mathbf{v}$
med hensyn på basisen $\mathcal{B}$

Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

$$\bullet \mathbf{u} = c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (a_1 + c_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + (a_n + c_n) \cdot \mathbf{v}_n$$

$$\beta(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a_1 + c_1 \\ \vdots \\ a_n + c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \beta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}) \quad \checkmark$$

$$\bullet b \cdot \mathbf{v} = ba_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + ba_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$\beta(b \cdot \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} ba_1 \\ \vdots \\ ba_n \end{bmatrix} = b \cdot \beta(\mathbf{v}) \quad \checkmark$$

Lineærtransformasjoner



anta $\dim V = n$

Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

Lineærtransformasjoner

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

β^{-1}

β^{-1} er en lineærtransformasjon!

$\mathbb{R}^n$

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$$

anta $\dim V = n$

Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

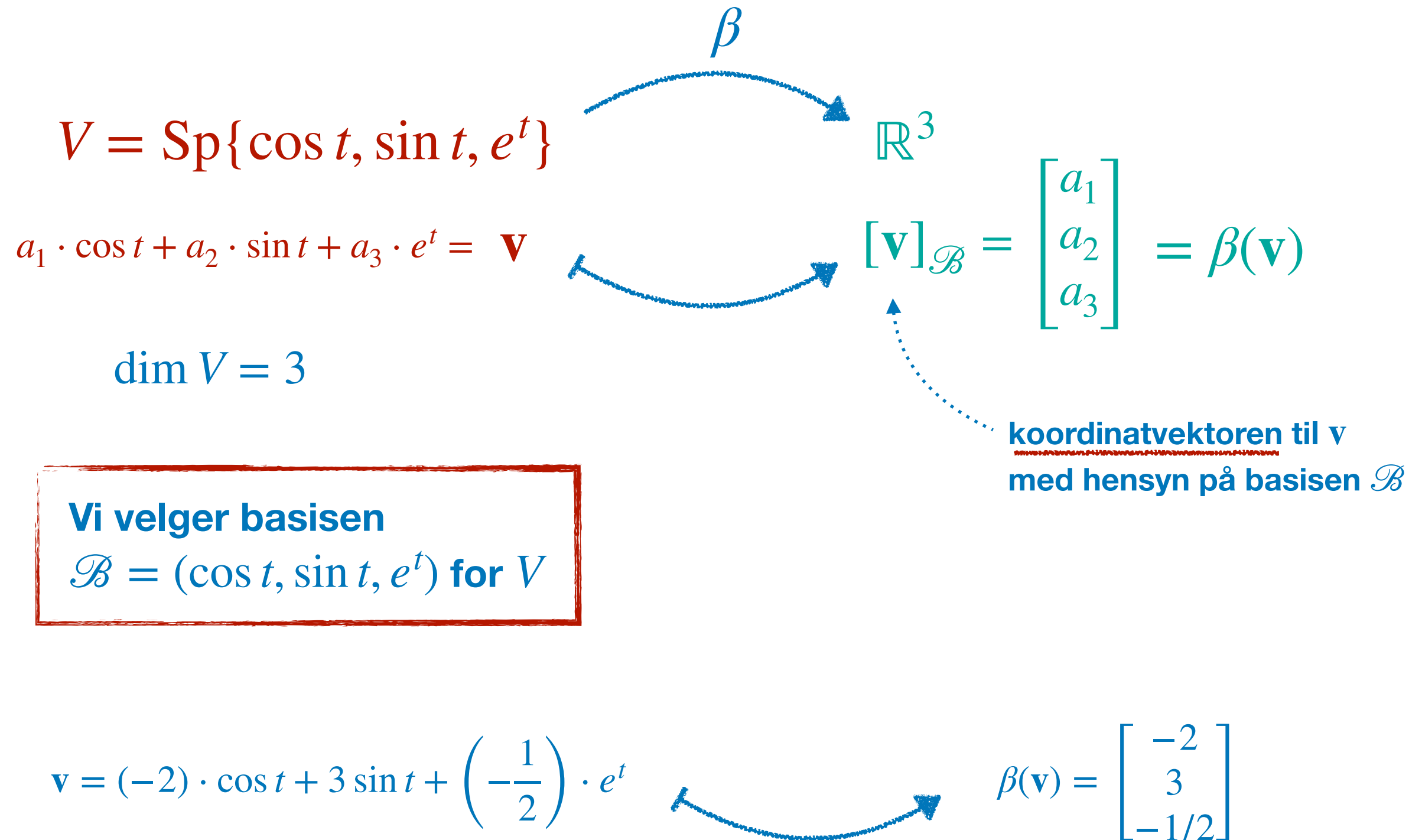
$$\bullet b \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba_1 \\ \vdots \\ ba_n \end{bmatrix} \quad \beta^{-1} \left(\begin{bmatrix} ba_1 \\ \vdots \\ ba_n \end{bmatrix} \right) =$$

$$\bullet \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \beta^{-1} \left(\begin{bmatrix} a_1 + c_1 \\ \vdots \\ a_n + c_n \end{bmatrix} \right) =$$

$$= ba_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + ba_n \cdot \mathbf{v}_n = b\beta^{-1} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= (a_1 + c_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + (a_n + c_n) \cdot \mathbf{v}_n = \beta^{-1} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right) + \beta^{-1} \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \right)$$

Lineærtransformasjoner



Matematikk 3

Lineærtransformasjoner og Basiser - Del 2

Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$T(\mathbf{v}) = c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + c_m \cdot \mathbf{w}_m$$

anta $\dim V = n$

og $\dim W = m$

La $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$
være en basis for V

La $\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$
være en basis for W

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

koordinatvektoren til $\mathbf{v}$
med hensyn på basisen $\mathcal{B}$

koordinatvektoren til $T(\mathbf{v})$
med hensyn på basisen $\mathcal{D}$

Lineærtransformasjoner

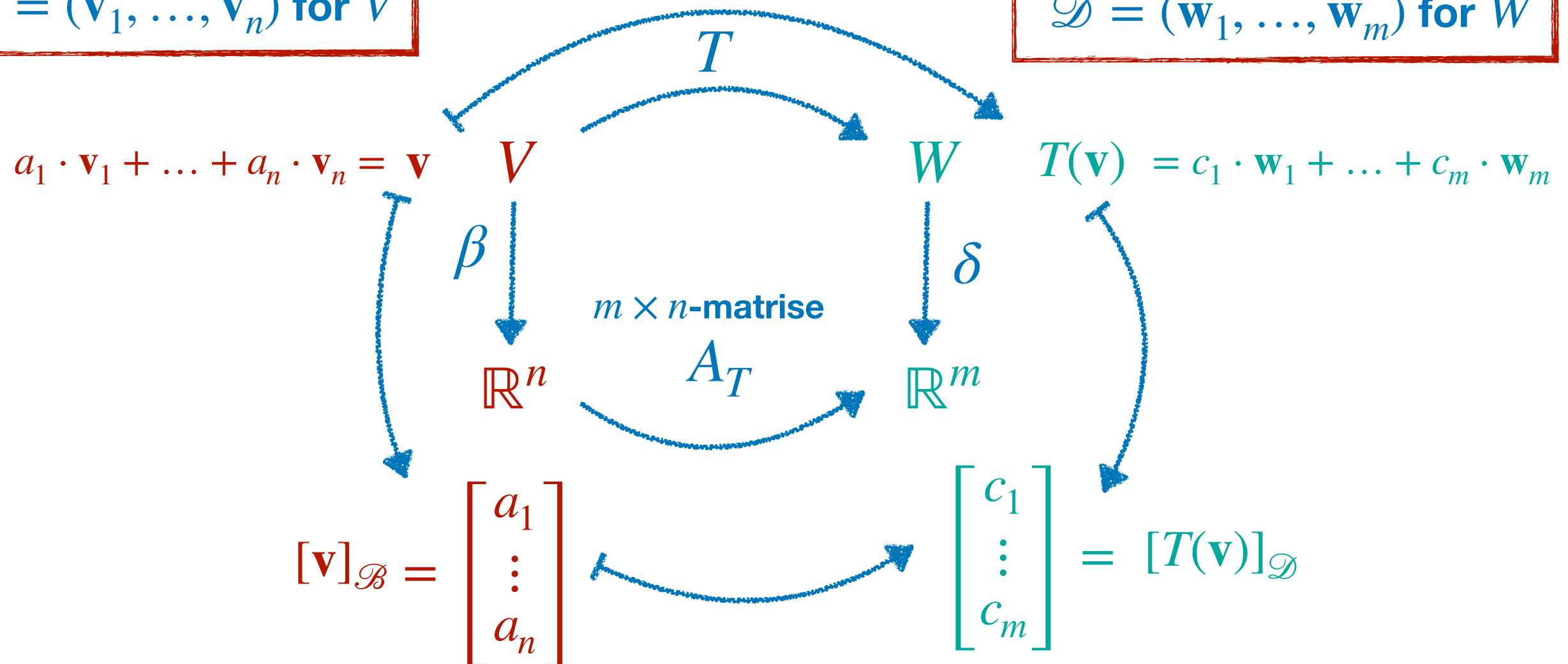
lineærtransformasjon

Vi har basisen

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ for } V$$

og vi har basisen

$$\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) \text{ for } W$$



Vi kaller $A_T = A_T(\mathcal{B}, \mathcal{D})$
standardmatrisen for T

med hensyn på
basisene $\mathcal{B}$ og $\mathcal{D}$

Lineærtransformasjoner

Vi har basisen

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ for } V$$

første basisvektor

$\mathbf{v}_1$ V

β

$\mathbb{R}^n$

Hvordan beregner vi A_T ?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineærtransformasjon

T

A_T

og vi har basisen

$$\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m) \text{ for } W$$

W

$T(\mathbf{v}_1)$

δ

$\mathbb{R}^m$

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{D}}$$

må være like!

$$A_T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

første kolonne i A_T

Altså må vi ha:

$$\text{første kolonne i } A_T = [T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{D}} \quad \text{andre kolonne i } A_T = [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{D}} \quad \dots \quad \text{nte kolonne i } A_T = [T(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{D}}$$

Eksempel

Vi velger basisen

$$\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t) \text{ for } V$$

lineærtransformasjon

T

Vi velger basisen

$$\mathcal{D} = (1, t, t^2, t^3) \text{ for } W$$

$$\text{Sp}\{\cos t, \sin t, e^t\} = V$$

$$W = P_3 = \{\text{polynomer av grad } \leq 3\}$$

f

$$T(f) = 3\text{e grad Taylorpolynom av } f \text{ i } 0$$

husk:

$$f(t) \mapsto T(f)(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{6}t^3$$

$$f_1(t) = \cos t \mapsto T(f_1)(t) = 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$f_2(t) = \sin t \mapsto T(f_2)(t) = t - \frac{t^3}{6}$$

$$f_3(t) = e^t \mapsto T(f_3)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

Eksempel

Vi velger basisen

$\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for V

lineærtransformasjon

T

Vi velger basisen

$\mathcal{D} = (1, t, t^2, t^3)$ for W

$\text{Sp}\{\cos t, \sin t, e^t\} = V$

$W = P_3 = \{\text{polynomer av grad } \leq 3\}$

$f(t)$

$T(f) = 3^{\text{e grad Taylorpolynom av } f \text{ i } 0}$

$$f_1(t) = \cos t \quad T(f_1)(t) = 1 - \frac{t^2}{2} = 1 + 0 \cdot t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$[f_1(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(t) = \sin t \quad T(f_2)(t) = t - \frac{t^3}{6}$$

$$[f_2(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3(t) = e^t \quad T(f_3)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

$$[f_3(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Vi velger basisen

$\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for V

lineærtransformasjon

T

Vi velger basisen

$\mathcal{D} = (1, t, t^2, t^3)$ for W

$\text{Sp}\{\cos t, \sin t, e^t\} = V$

$W = P_3 = \{\text{polynomer av grad } \leq 3\}$

$f(t)$

$T(f) = 3^{\text{e grad Taylorpolynom av } f \text{ i } 0}$

$$f_1(t) = \cos t \quad T(f_1)(t) = 1 - \frac{t^2}{2} = 1 + 0 \cdot t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$[f_1(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(t) = \sin t \quad T(f_2)(t) = t - \frac{t^3}{6} = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot t^3$$

$$[f_2(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3(t) = e^t \quad T(f_3)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

$$[f_3(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Vi velger basisen

$\mathcal{B} = (\cos t, \sin t, e^t)$ for V

lineærtransformasjon

T

Vi velger basisen

$\mathcal{D} = (1, t, t^2, t^3)$ for W

$\text{Sp}\{\cos t, \sin t, e^t\} = V$

$W = P_3 = \{\text{polynomer av grad } \leq 3\}$

$f(t)$

$T(f) = 3\text{e grad Taylorpolynom av } f \text{ i } 0$

$$f_1(t) = \cos t \quad T(f_1)(t) = 1 - \frac{t^2}{2} = 1 + 0 \cdot t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$[f_1(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(t) = \sin t \quad T(f_2)(t) = t - \frac{t^3}{6} = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot t^3$$

$$[f_2(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3(t) = e^t \quad T(f_3)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} = 1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

$$[f_3(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Matematikk 3

Lineærtransformasjoner - Isomorfier

Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

anta $\dim V = n$

$\dim W = \dim V = n$

La $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$
være en basis for V

anta at T er både injektiv og surjektiv

• $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ er lineært
uavhengige

• $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ utspenner W

fordi: dersom $\mathbf{0} = c_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_n T(\mathbf{v}_n)$
 $= T(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n)$

fordi $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ utspenner $\text{Im } T$ og
 $\text{Im } T = W$

T injektiv $\Rightarrow c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

$\mathcal{B}$ er en basis $\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

anta $\dim V = n$

$\dim W = \dim V = n$

La $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$
være en basis for V

anta at T er både injektiv og surjektiv

• $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ er lineært
uavhengige

• $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ utspenner W

$\mathcal{D} = (T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$
er en basis for W

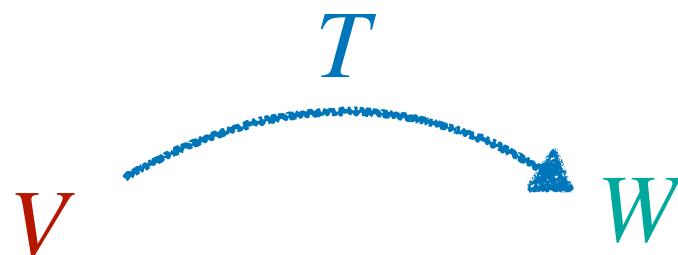
Lineærtransformasjoner

La $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$
være en basis for V

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

lineærtransformasjon



$\mathcal{D} = (T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$
er en basis for W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

anta at T er både
injektiv og surjektiv

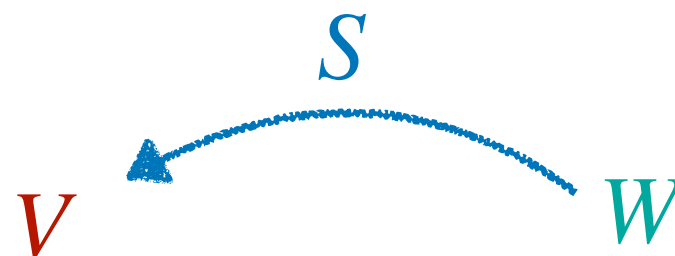
vi skriver: $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1)$

$$\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2)$$

$\vdots$

$$\mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}_n)$$

lineærtransformasjon



$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n = S(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{w}_n$$

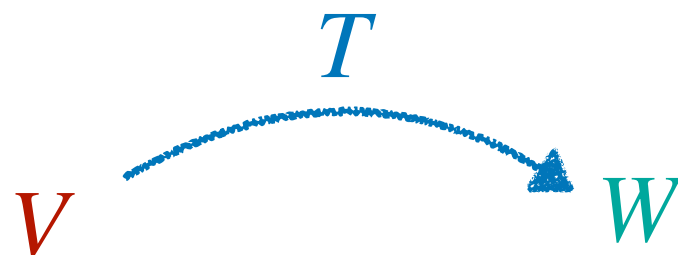
Lineærtransformasjoner

La $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$
være en basis for V

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

lineærtransformasjon



$\mathcal{D} = (T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$
er en basis for W

endelig dimensjonalt
vektorrom

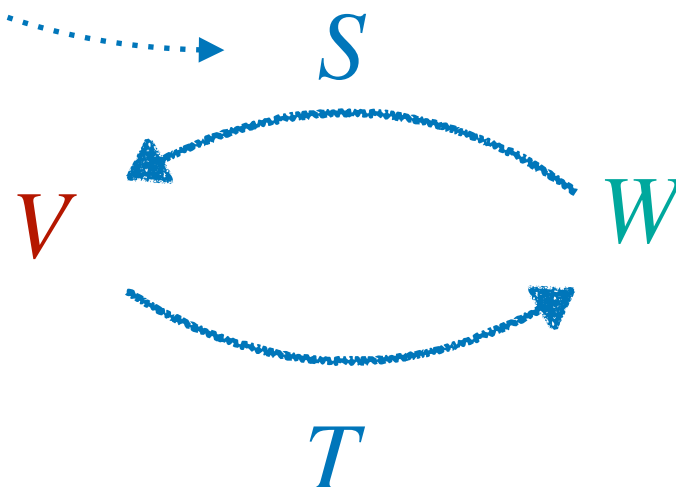
$$T(\mathbf{v}) = a_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n \cdot T(\mathbf{v}_n)$$

anta at T er både
injektiv og surjektiv

- T er et eksempel på en **isomorfi**.

dvs det finnes S slik at

lineærtransformasjon



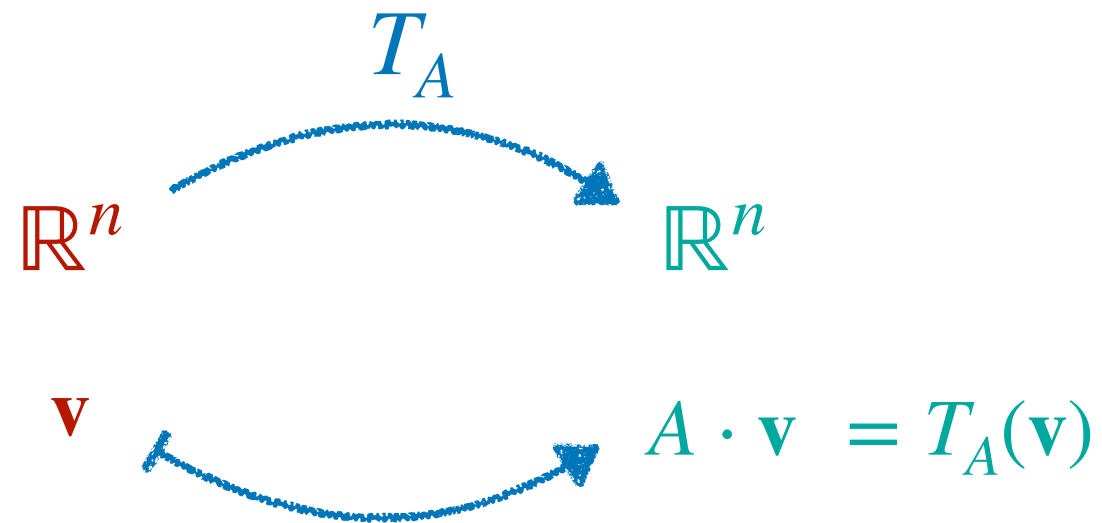
- $S(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v}$ i V

- $T(S(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$ for alle $\mathbf{w}$ i W

vi skriver også: $S = T^{-1}$

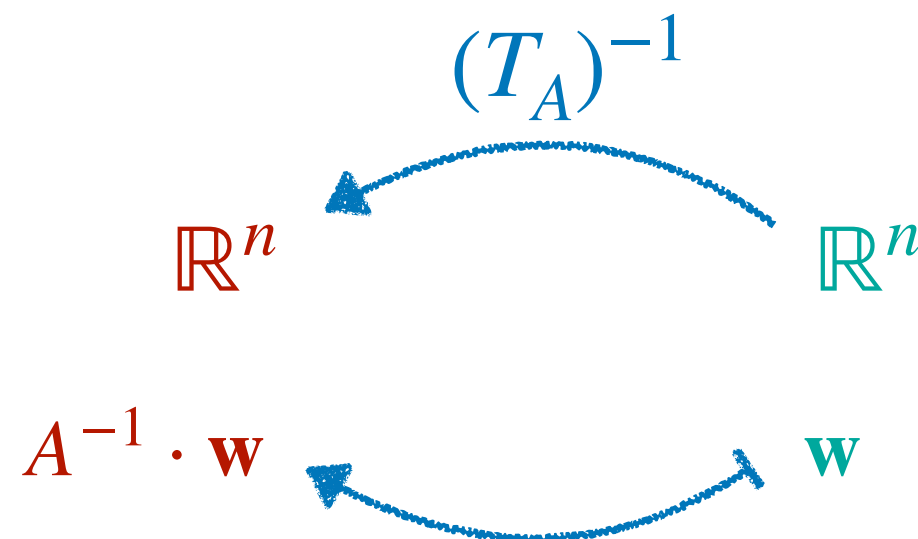
Lineærtransformasjoner

A en reell $n \times n$ -matrise



- T_A er en isomorfi hvis og bare hvis A er en inverterbar matrise.

$$(T_A)^{-1} = S = T_{A^{-1}}$$



flere eksempler i
notatene...

Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{w}_n$$

anta $\dim V = n = \dim W$

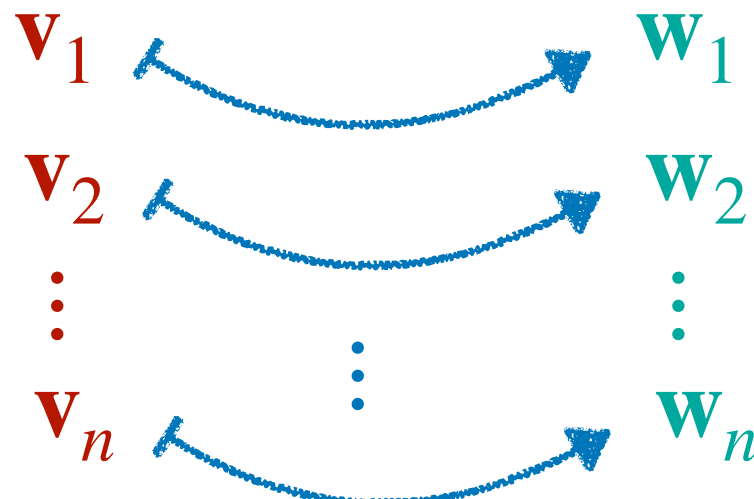
Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

og vi velger en basis

$\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ for W

Vi kan definere T ved



Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

Vi kan også definere T^{-1} :

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T^{-1}

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n = T^{-1}(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{w}_n$$

anta $\dim V = n = \dim W$

Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

og vi velger en basis

$\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ for W

- Både T og T^{-1} er både injektiv og surjektiv.

- T er en isomorfi.

Lineærtransformasjoner

lineærtransformasjon

Vi kan også definere T^{-1} :

endelig dimensjonalt
vektorrom

V

T^{-1}

W

endelig dimensjonalt
vektorrom

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{v}_n = T^{-1}(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = c_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{w}_n$$

anta $\dim V = n = \dim W$

Vi velger en basis

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ for V

og vi velger en basis

$\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ for W

- Både T og T^{-1} er både injektiv og surjektiv.

- T er en isomorfi.