NTNU | Kunnskap for en bedre verden

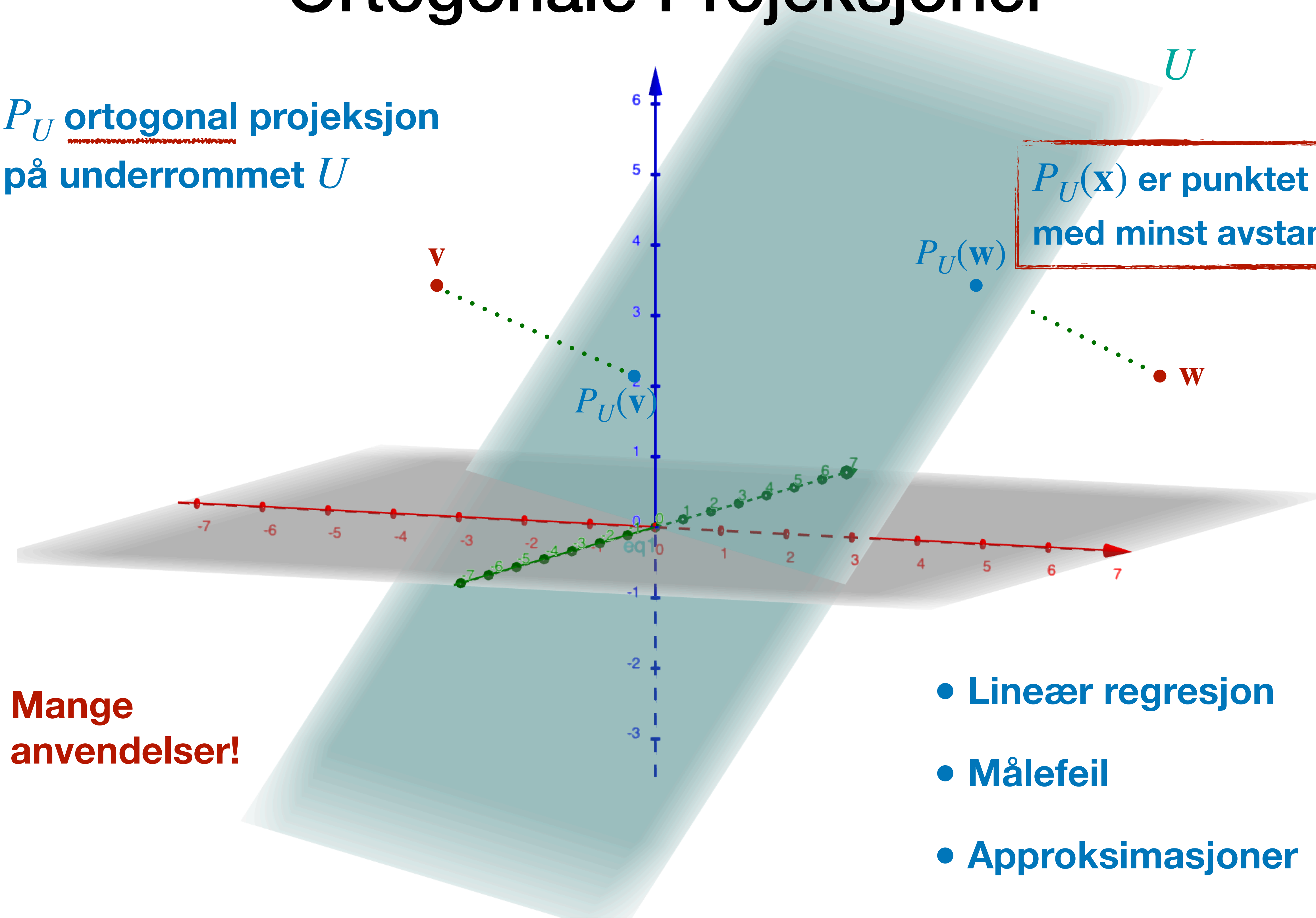
Matematikk 3

Projeksjoner - Introduksjon

Ortogonale Projeksjoner

P_U ortogonal projeksjon på underrommet U

$P_U(\mathbf{x})$ er punktet i U med minst avstand til $\mathbf{x}$

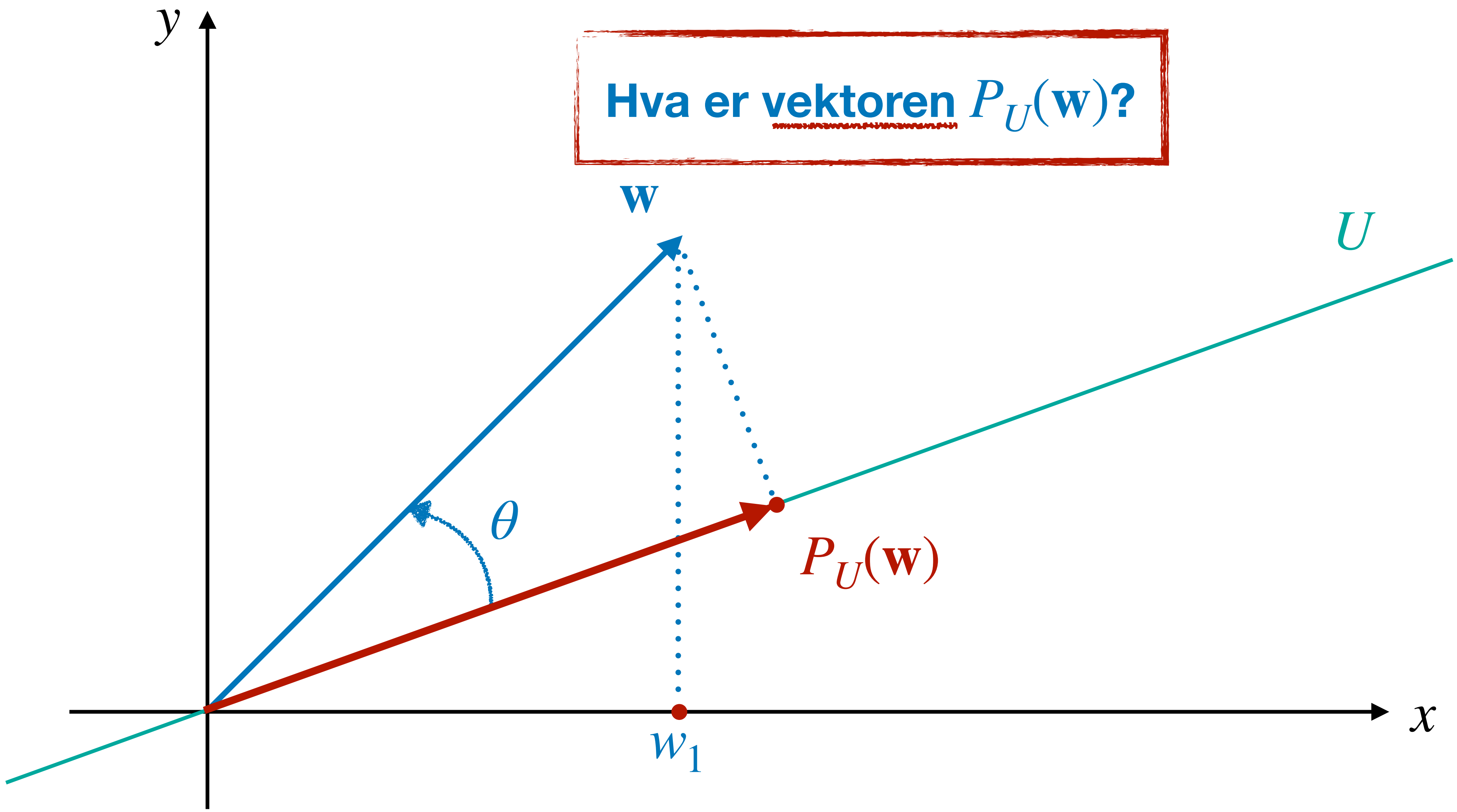


Mange anvendelser!

- Lineær regresjon
- Målefeil
- Approksimasjoner
- Fourier-Analyse

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

Hva er vektoren $P_U(\mathbf{w})$?



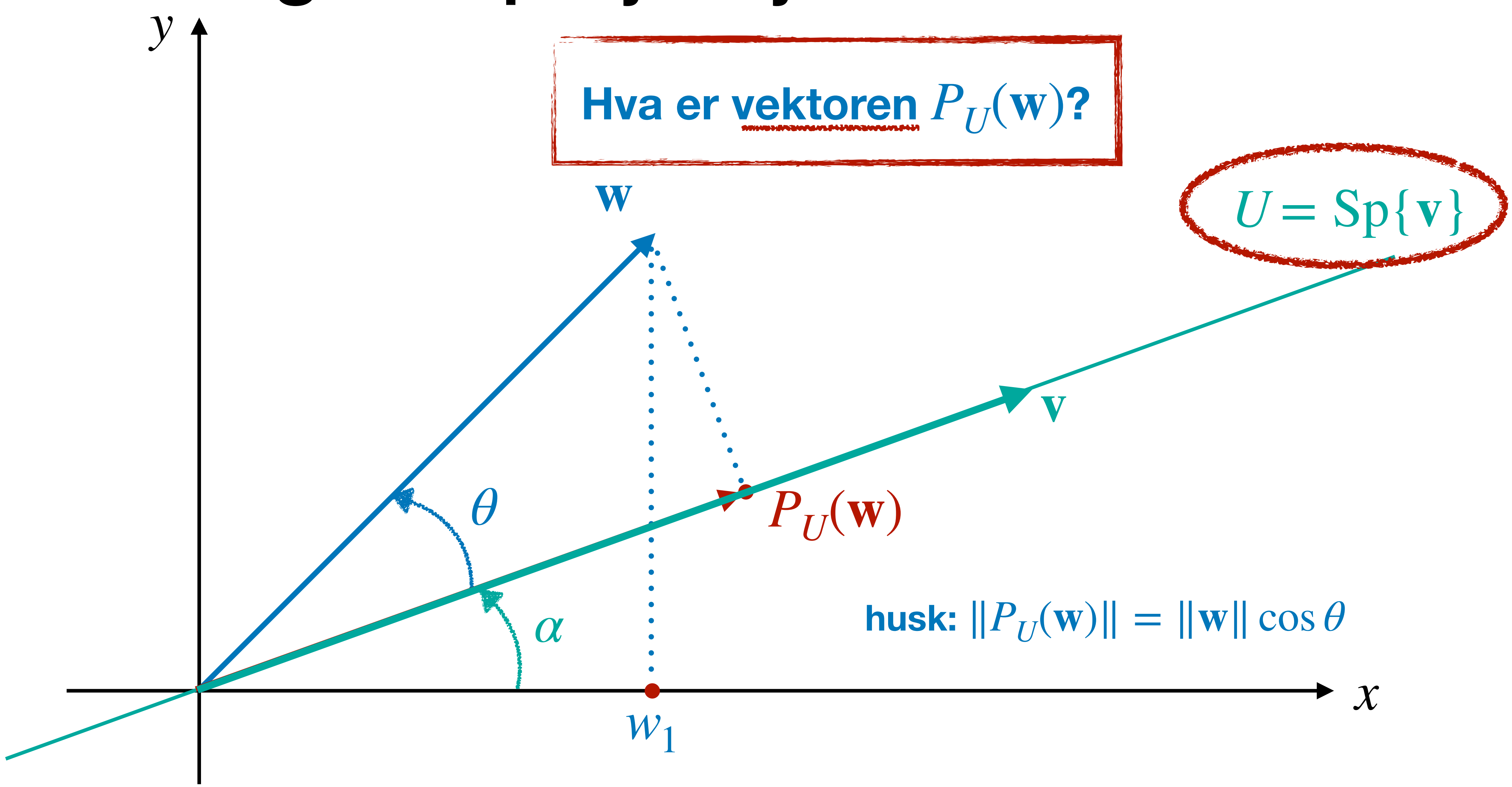
$$\|P_U(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\| \cos\theta$$

avstand fra
origo til $P_U(\mathbf{w})$

avstand fra
origo til $\mathbf{w}$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

Hva er vektoren $P_U(\mathbf{w})$?



husk: $\|P_U(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\| \cos\theta$

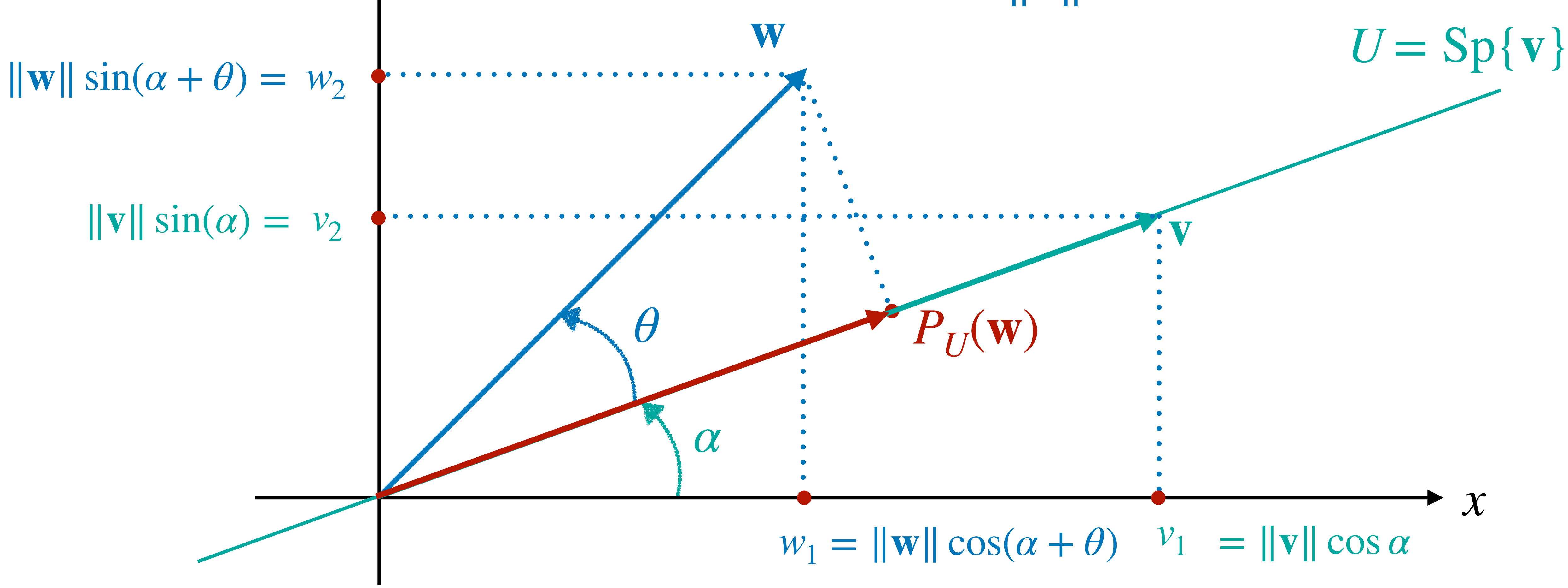
$U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$ $\quad P_U(\mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v}$ $\quad P_U(\mathbf{w}) = (\|\mathbf{w}\| \cos\theta) \cdot \mathbf{v}$**?**

med $a = ?$

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\boxed{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos\theta}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\boxed{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$



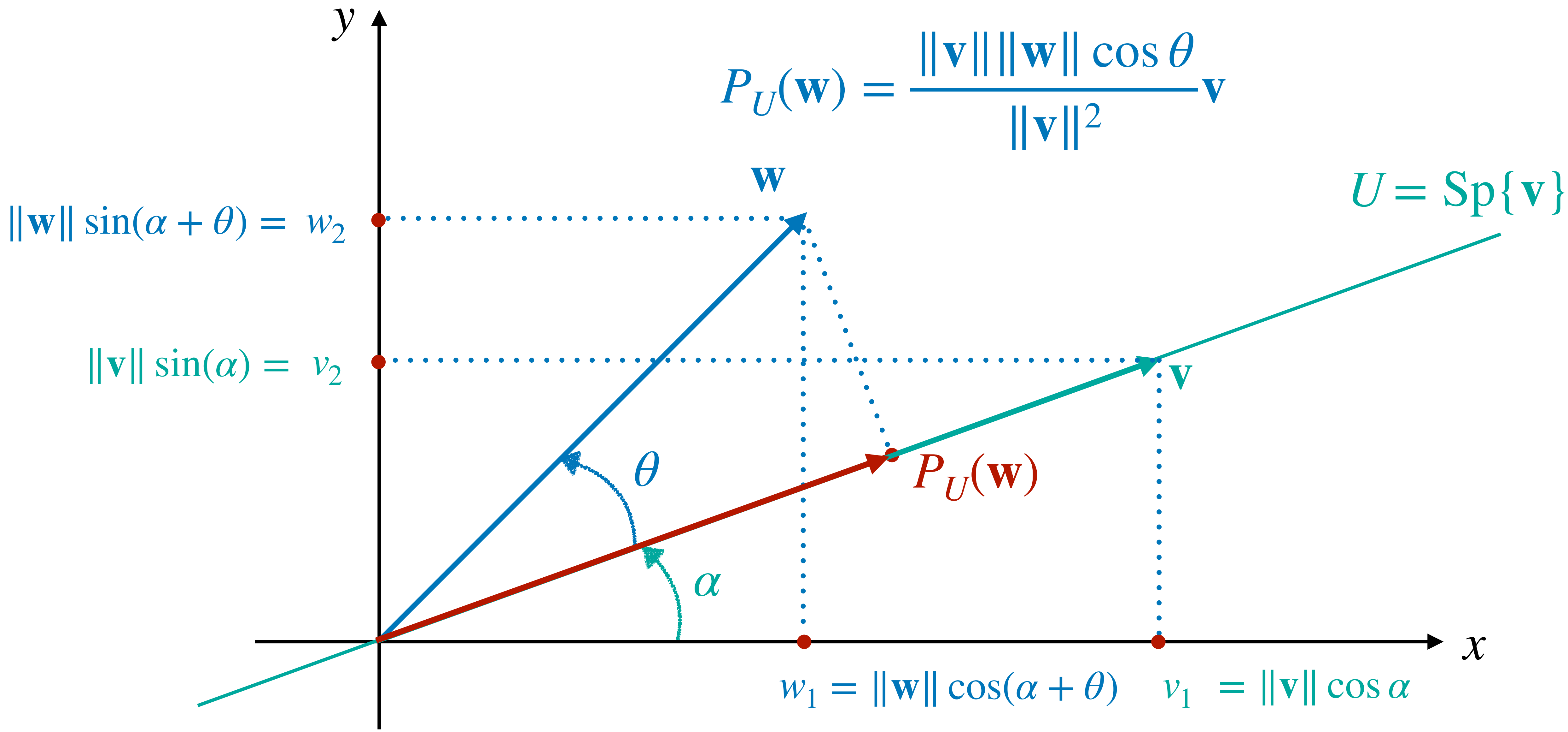
$$\boxed{v_1w_1 + v_2w_2 =} \ \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|(\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\theta))$$

$$= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|(\cos\alpha(\cos\alpha\cos\theta \cancel{- \sin\alpha\sin\theta}) + \sin\alpha(\sin\alpha\cos\theta \cancel{+ \cos\alpha\sin\theta}))$$

$$= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|(\cos^2\alpha\cos\theta + \sin^2\alpha\cos\theta)$$

$$\boxed{= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta}$$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$



en “skalar”, dvs et reelt tall!

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta}$$

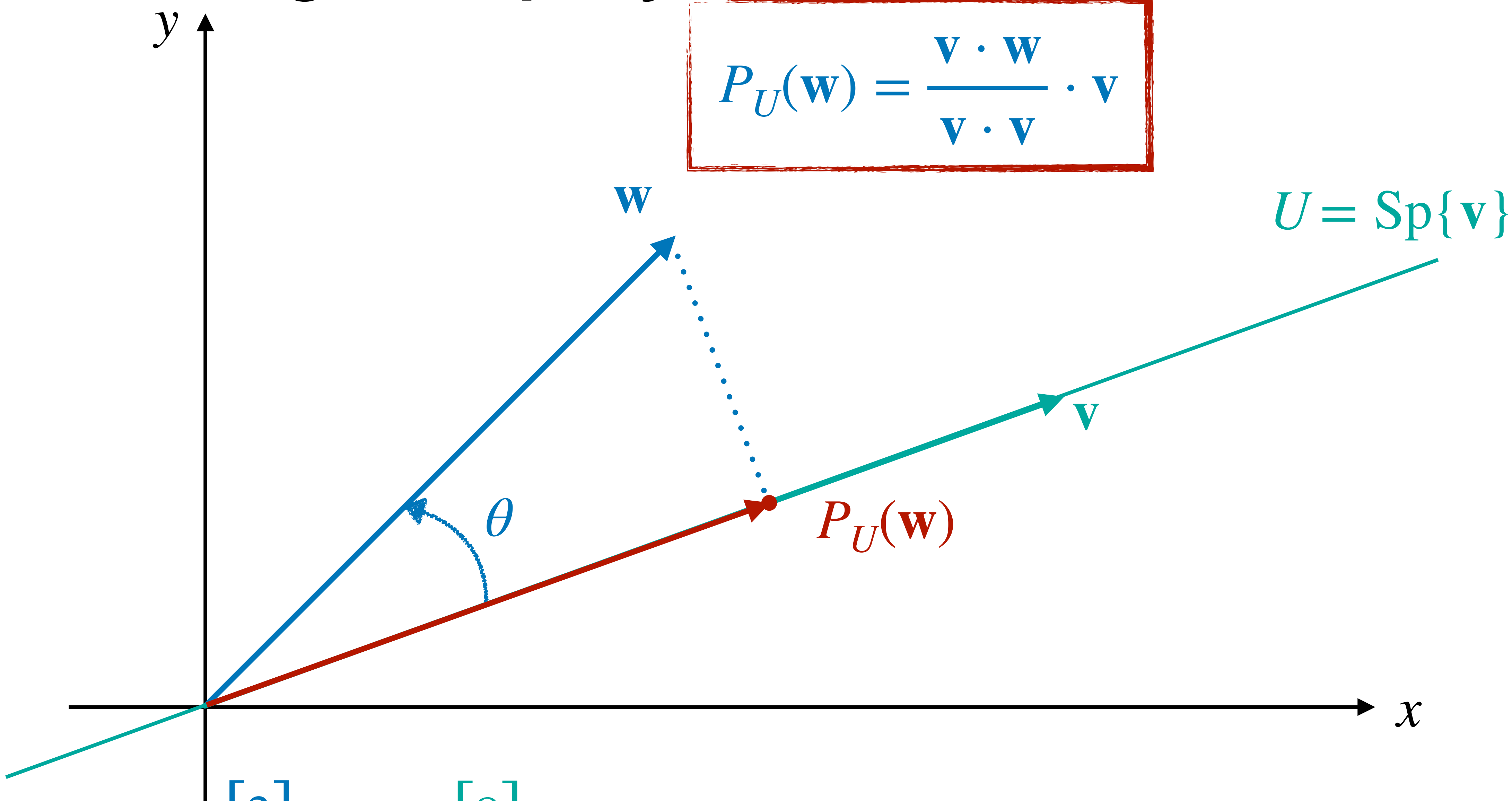
skalarprodukt av v og w

$$\boxed{P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}}$$

ortogonal projeksjon av w på U

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}}$$



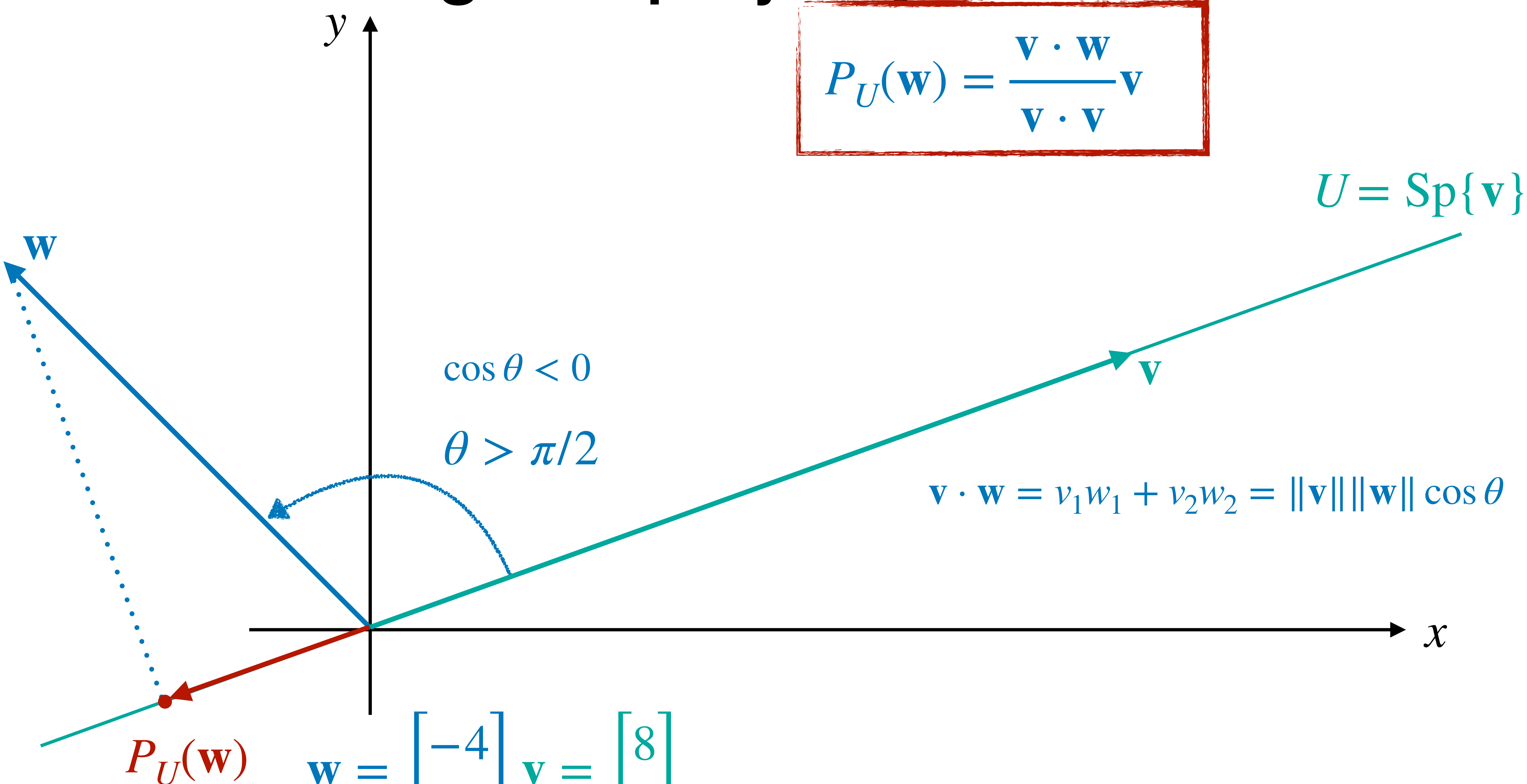
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

Eksempel:

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} \quad = \frac{\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} = \frac{24+24}{64+16}\cdot\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\cdot\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}}$$



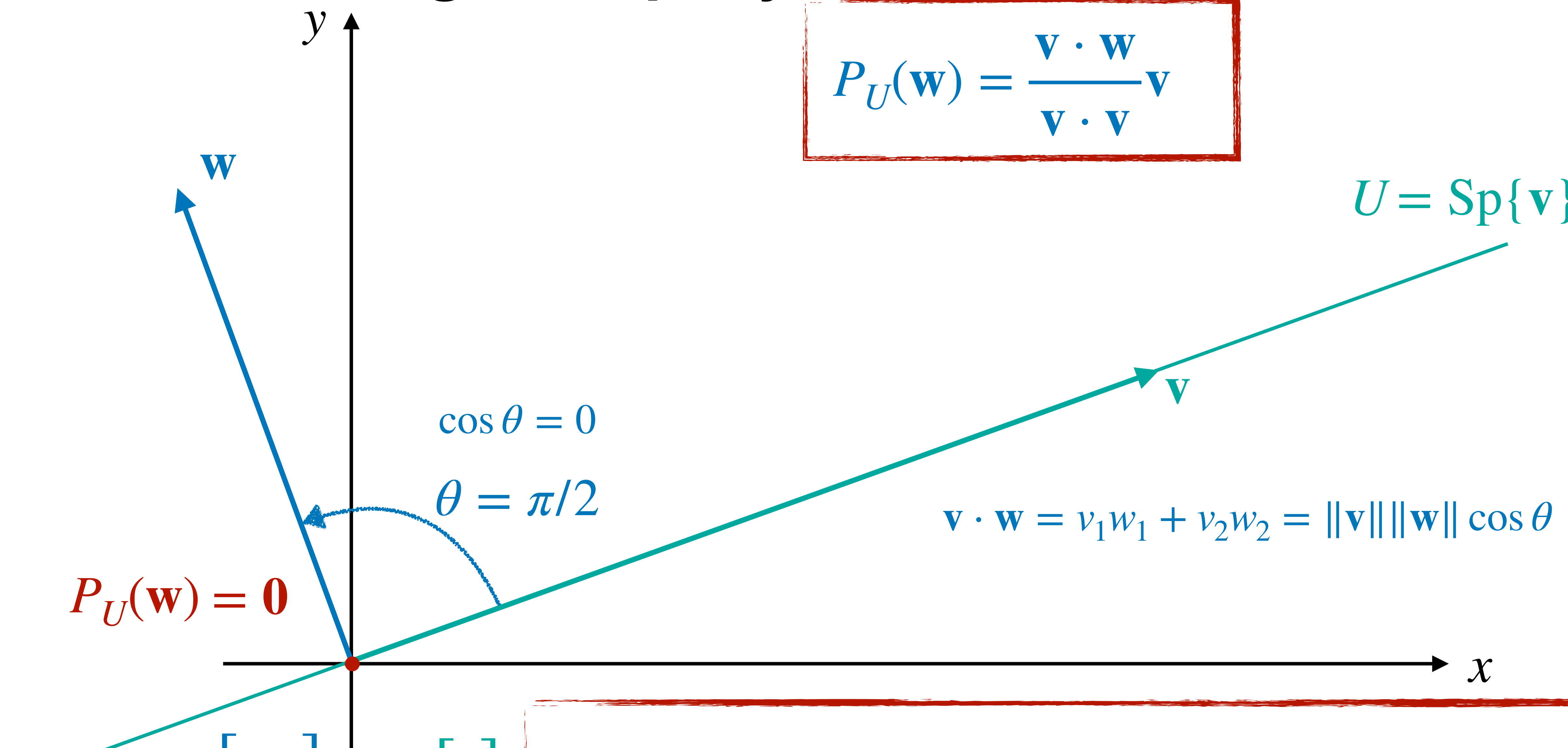
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Eksempel:

$$\underline{P_U(\mathbf{w})} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} \quad = \frac{\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{-\frac{3}{20} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}}$$



$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

v og w er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$

Eksempel:

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{0}{80}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Kunnskap for en bedre verden

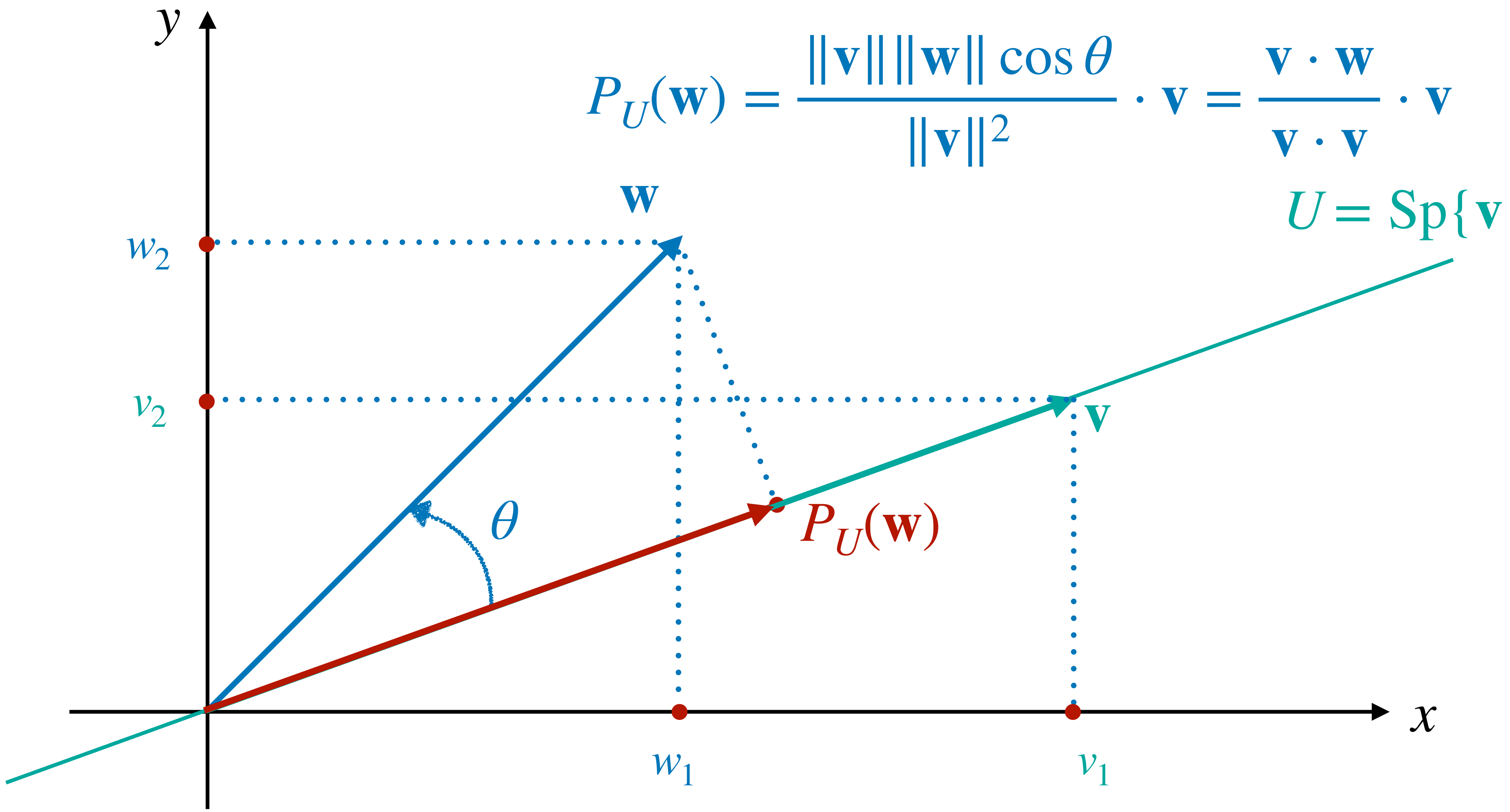
Matematikk 3

Projeksjoner - Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^2$

Husk:

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta}{\|\mathbf{v}\|^2}\cdot\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$$



en "skalar", dvs et reelt tall!

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta$$

skalarprodukt av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$

Dette kan vi gjøre i $\mathbb{R}^n$!

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \text{ vektorer i } \mathbb{R}^n$$

eller prikkproduktet

- **Vi definerer skalarproduktet av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ som:**

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$$

reelt tall!

- **Lengden av vektoren $\mathbf{v}$ er gitt ved:**

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

et reelt tall ≥ 0

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

skalarprodukt: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

lengde: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

generalisering av Pythagoras:

$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$$

- **Vi har fortsatt:**

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos \theta$$

vinkel mellom vektorene i planet utspent av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$

- **Vi sier derfor:**

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

notasjon: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

parallele hvis

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \pm \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$$

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

skalarprodukt: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

lengde: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

Skalarproduktet er andre flotte egenskaper:

symmetri

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

positivitet

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

kun nullvektoren har lengde 0

linearitet

- $\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$

$$v_1(aw_1 + bu_1) + \ldots = av_1w_1 + bv_1u_1 + \ldots$$

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ **skalarprodukt:** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n$

symmetri: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ **lengde:** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

positivitet: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **ortogonal** $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$

linearitet: $\mathbf{v}\cdot(a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + b(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$

- **For fast $\mathbf{v}$:**

$\boxed{\text{lineærtransformasjon}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "T"] & \mathbb{R} \\ \mathbf{w} \arrow[r, mapsto, bend right] & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = T(\mathbf{w}) \end{tikzcd}$$

standardmatrise A_T? A_T er en $1 \times n$-matrise

første kolonne...

$T(\mathbf{e}_1) = v_1 \quad T(\mathbf{e}_2) = v_2 \quad \ldots \quad T(\mathbf{e}_n) = v_n$ $\longrightarrow$ $A_T = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n] = \mathbf{v}^T$

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w}}$$

matrisemultiplikasjon

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ skalarprodukt: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n$

symmetri: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ lengde: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

positivitet: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ortogonal $\mathbf{v}\perp\mathbf{w} \iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$

linearitet: $\mathbf{v}\cdot(a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + b(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$ $\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w}}$

- **For vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$:**

$$\bullet\; P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

ortogonal projeksjon av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\cancel{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}\cancel{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

$$= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$$

$$= 0$$

$$\bullet\; \mathbf{w} = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}))$$

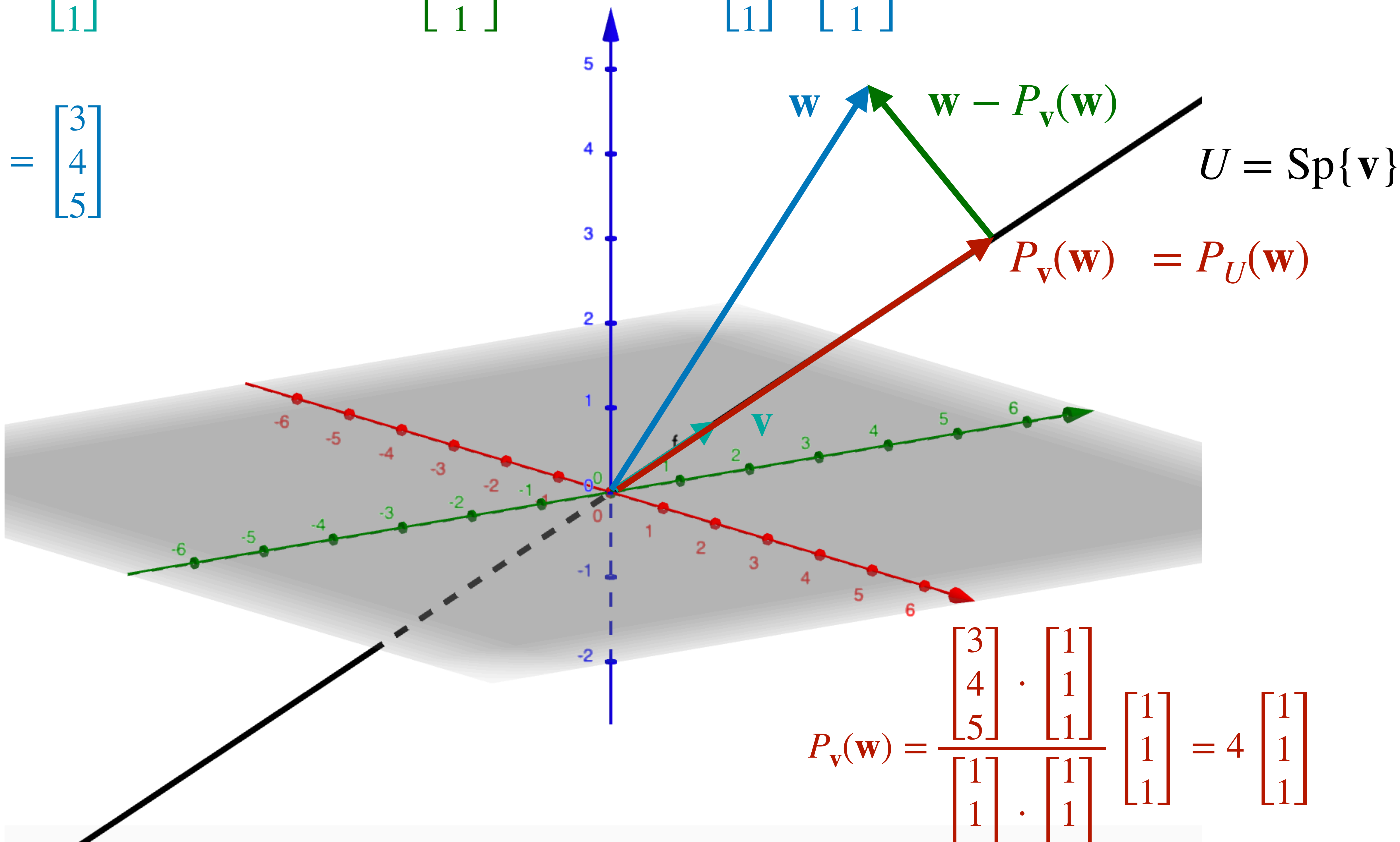
komponente parallel med $\mathbf{v}$ komponente ortogonal på $\mathbf{v}$

Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \perp \quad \mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

fordi $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ **skalarprodukt:** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

symmetri: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ **lengde:** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

positivitet: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **ortogonal** $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

linearitet: $\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$ $\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w}}$

- **For en vektor $\mathbf{v}$:**

$$\bullet\ P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \quad = P_U(\mathbf{w})$$

ortogonal projeksjon av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$

ortogonal projeksjon av $\mathbf{w}$ på $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$

- **Dette skal vi generalisere til underrom av større dimensjon…**

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner og Ortogonale basiser

Projeksjoner på en vektor i $\mathbb{R}^n$

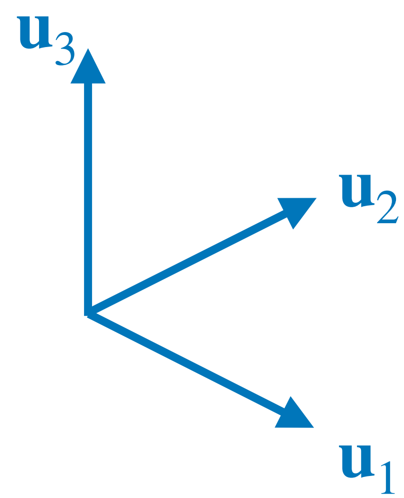
- **For vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$:**
  - $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \dfrac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} \quad = P_U(\mathbf{w})$

ortogonal projeksjon av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$

ortogonal projeksjon av $\mathbf{w}$ på $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$

- **Dette vil vi generalisere til underrom av større dimensjon…**

Ortogonale mengder



- **En mengde med vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ som ikke er nullvektorer kalles en ortogonal mengde dersom**

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ når } i \neq j$$

dvs alle er ortogonale på hverandre

- **Om i tillegg $\|\mathbf{u_i}\| = 1$ for alle vektorer, kalles mengden ortonormal.**

Vi kan alltid normalisere ved å gange $\mathbf{u}_i$ med $\dfrac{1}{\|\mathbf{u}_i\|}$.

Eksempel:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

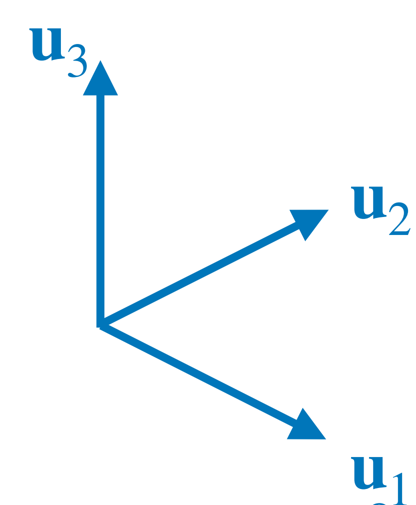
har lengde 1.

Eksempel: Enhetsvektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ er en ortonormal mengde.

Ortogonale mengder

$\boxed{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ når } i \neq j}$

- **En ortogonal mengde med vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ er lineært uavhengig.**



vi vil vise $x_1 = \ldots = x_m = 0$

fordi:

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

anvender $\cdot\, \mathbf{u}_1$ på begge sider

$$(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_1$$

linearitet

ortogonal mengde

$$x_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + x_2\overbrace{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}^{=0} + \ldots + x_m\overbrace{(\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_1)}^{=0} = 0$$

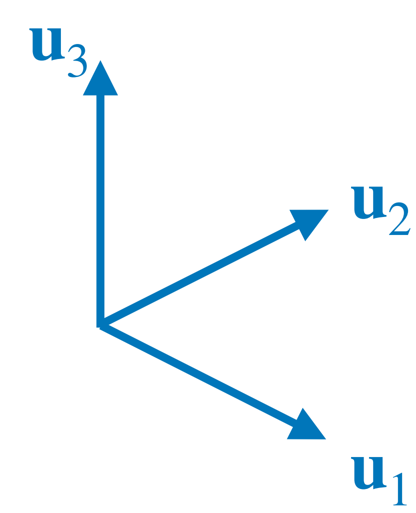
$$x_1\underbrace{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}_{\neq 0} = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$

gjenta med $\cdot\, \mathbf{u}_2, \cdot\, \mathbf{u}_3, \ldots$

$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$
når $i \neq j$

Ortogonale basiser



- **En ortogonal mengde med vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ som er en basis for et underrom kalles en ortogonal basis.**

Eksempel:

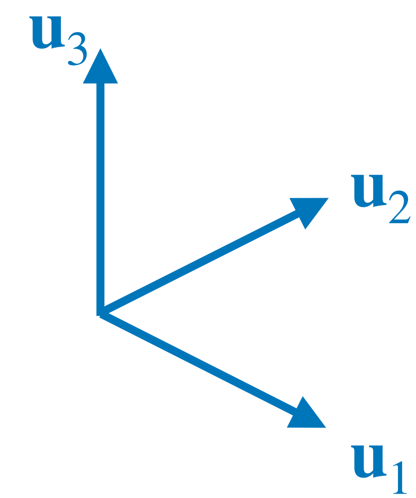
Enhetsvektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ danner en ortogonal basis for $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ **danner en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.**

Mens $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ **danner en basis for $\mathbb{R}^3$**

som ikke er ortogonal.

Ortogonale basiser



Ortogonale basiser er kjempepraktiske!

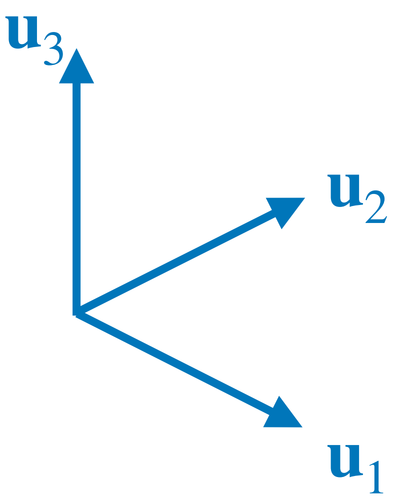
La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom med en ortogonal basis $\mathscr{B} = \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. La $\mathbf{u}$ være en vektor i U.

- **Koordinatene $a_1, \ldots, a_m$ til $\mathbf{u}$ med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ er**

$$a_1 = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \qquad a_2 = \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \qquad \ldots \qquad a_m = \frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m}$$

med andre ord: $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \dfrac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \dfrac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m}\mathbf{u}_m$

Ortogonale basiser



$\boxed{\text{Ortogonale basiser er kjempepraktiske!}}$

La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom med en ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. La $\mathbf{w}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$.

- **Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{w}$ på U er**

$$P_U(\mathbf{w}) = P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{w}) + P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{w}) + \ldots + P_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{w})$$

$$= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m}\mathbf{u}_m$$

- **$P_U(\mathbf{w})$ er punktet i U med kortest avstand til $\mathbf{w}$.**

Ortogonale basiser

Eksempel: $U = \{z-\textbf{planet i } \mathbb{R}^3\}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en ortogonal basis for U

$$P_U(\mathbf{w}) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS!

- **Det er avgjørende at basisen for U er ortogonal.**

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ som ikke er en ortogonal basis for U.

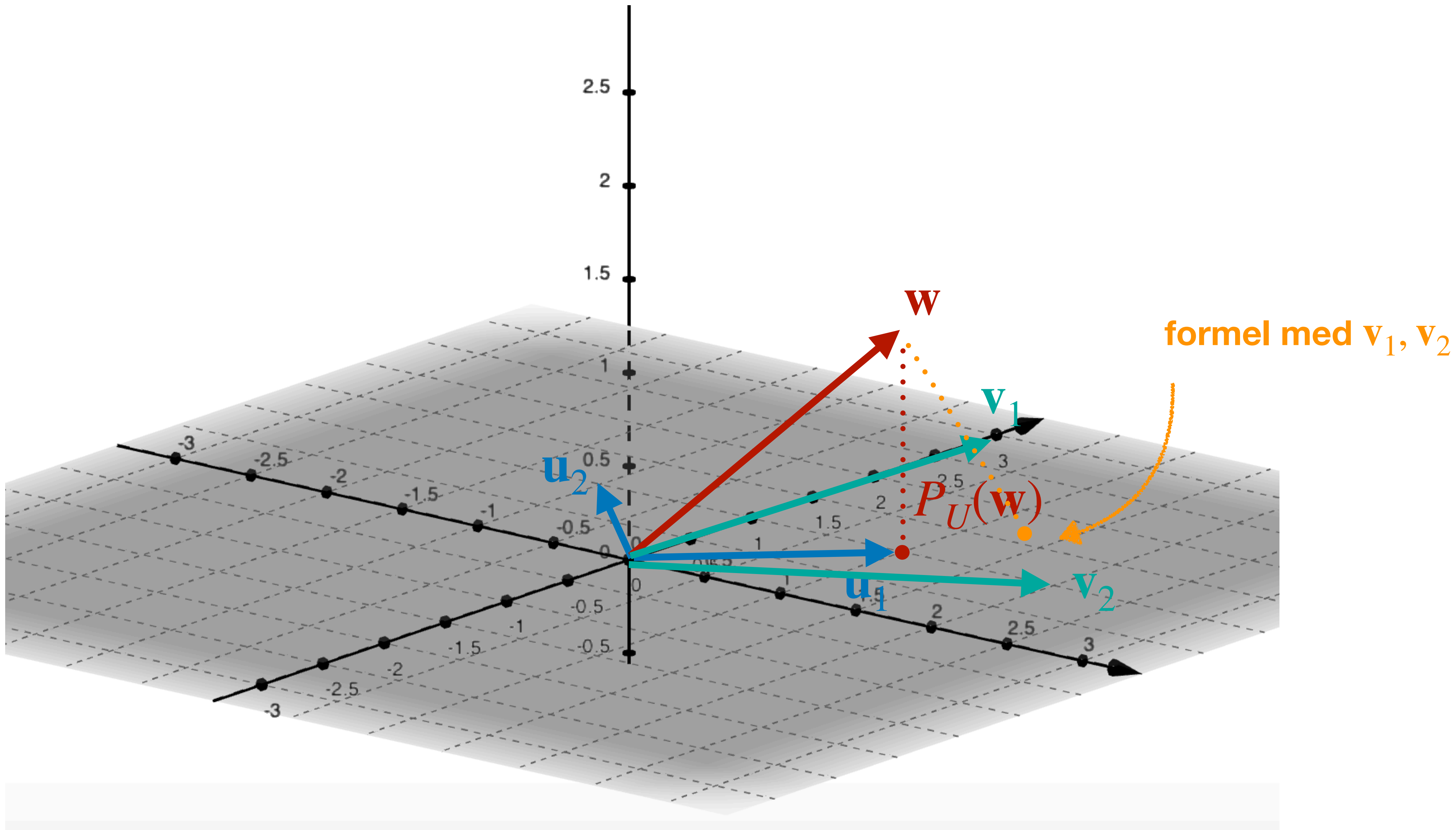
ikke med minst avstand til $\mathbf{w}$

Da gir $\dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$ feil punkt i U.

Ortogonale basiser

Eksempel: $U = \{z - \textbf{planet i } \mathbb{R}^3\}$ $\qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$



NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner - Gram-Schmidts metode

Gram-Schmidt

- **Hvordan finner vi en ortogonal basis?**

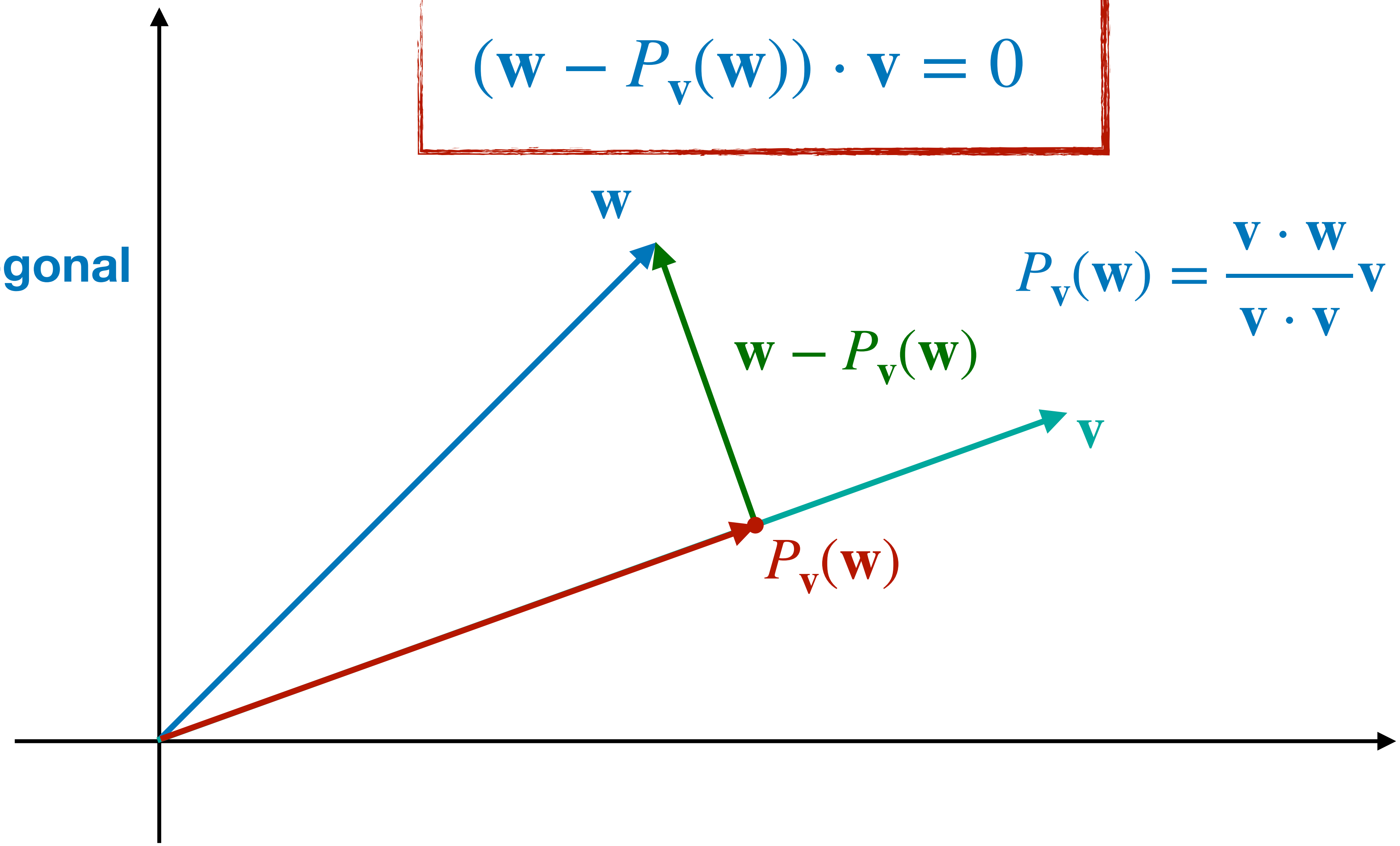
$\mathbb{R}^2$

$$\boxed{(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{v} = 0}$$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$

ikke ortogonal

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}$$



Gram-Schmidt

- **Hvordan finner vi en ortogonal basis?**

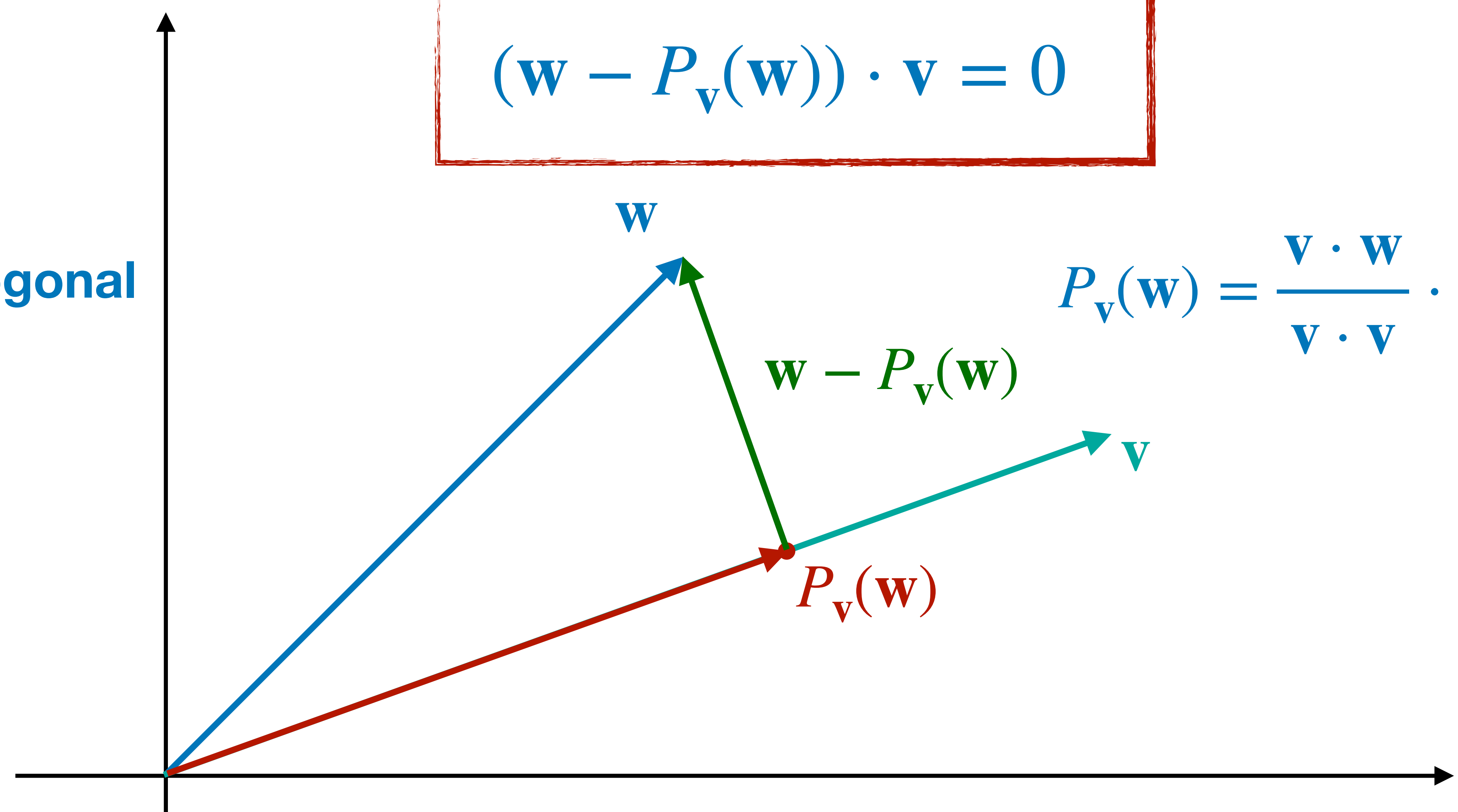
$\mathbb{R}^2$

$$\boxed{(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{v} = 0}$$

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$

ikke ortogonal

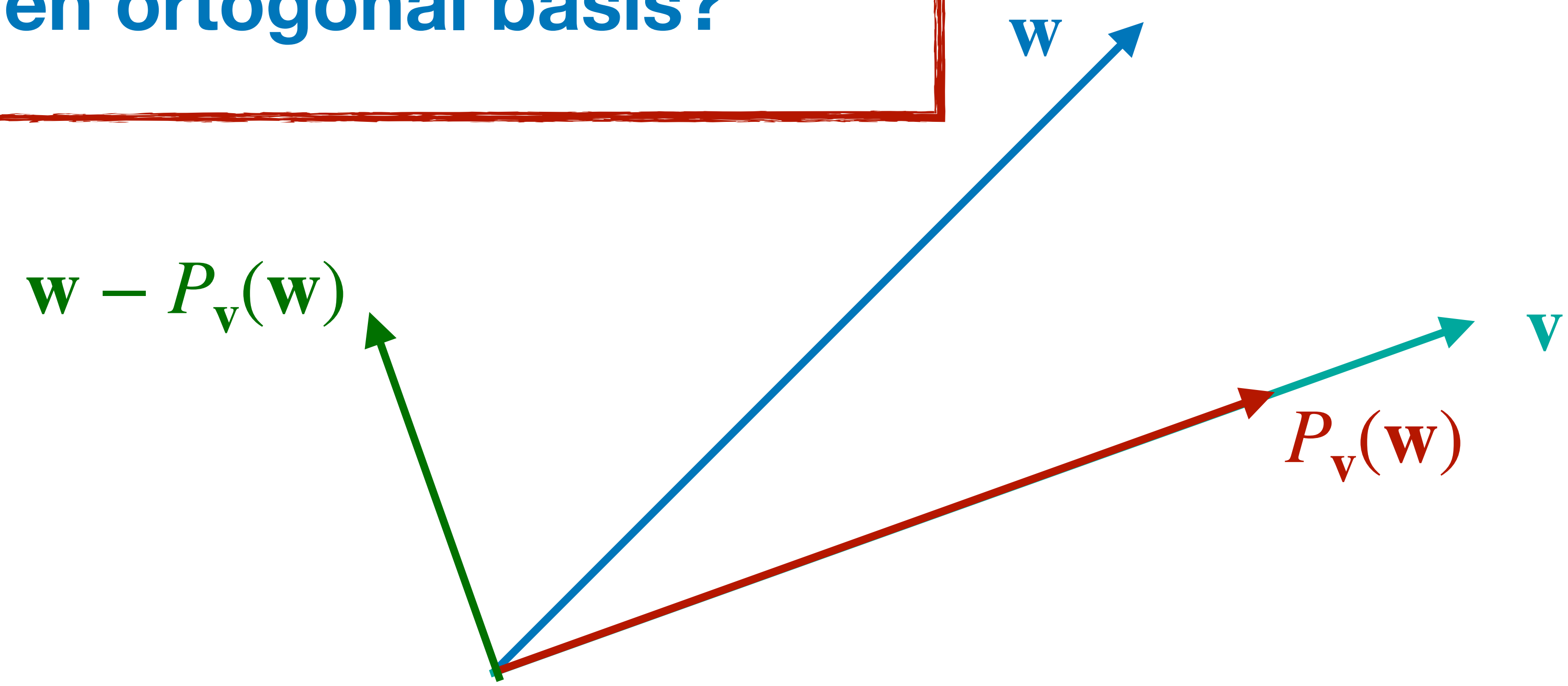
$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$$



$\mathbf{v}$ og $(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}))$ danner en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$

Gram-Schmidt

- Hvordan finner vi en ortogonal basis?



- Oppskrift for to vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Anta: $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige

- projiser $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$: $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$

- ta differensen $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$

- så blir $\mathbf{v}$ og $(\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}))$ en ortogonal mengde

som utspenner det samme underrommet som $\mathbf{v}, \mathbf{w}$!

Gram-Schmidt

- Hvordan finner vi en ortogonal basis?

- Oppskrift for tre vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Anta: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige

men ikke ortogonal

- sett $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
- projiser $\mathbf{v}_2$ på $\mathbf{u}_1$: $P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2)$
- ta differensen $\mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2)$
- sett $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2)$
- nå: $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$

- projiser $\mathbf{v}_3$ på planet U utspent av $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$: $P_U(\mathbf{v}_3)$
- sett $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - P_U(\mathbf{v}_3)$
- nå: $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_3$ og $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$
- altså er $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ en ortogonal mengde

som utspenner det samme underrommet som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$!

Gram-Schmidt

- **Hvordan finner vi en ortogonal basis?**

- **Oppskrift for tre vektorer i $\mathbb{R}^n$:**

Anta: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige

men ikke ortogonal

- **sett** $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$

- **sett** $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$

- **sett** $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - P_U(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$

- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ **en ortogonal mengde**

som utspenner det samme underrommet som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$!

Gram-Schmidt

- Hvordan finner vi en ortogonal basis?

men ikke ortogonal

- Oppskrift for m vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Anta: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uavhengige

- sett $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
- sett $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$
- sett $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - P_U(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$
- sett $\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \dfrac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3$
- $\vdots$

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ danner en ortogonal basis for $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$

fortsett prosessen til vi får $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ som danner en ortogonal mengde

Gram-Schmidt

- **Eksempel:** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ **danner en ortogonal basis for** $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

- **sett** $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$

- **sett** $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} - \dfrac{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} - \dfrac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{bmatrix}}$

- **sett** $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - P_U(\mathbf{v}_3)$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/6\\1/6\\1/6\\-3/6\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\\0\end{bmatrix}}$$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner - Ortogonalt komplement

Ortogonalt komplement

La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom i $\mathbb{R}^n$.

- **Det ortogonale komplementet til U i $\mathbb{R}^n$ er mengden**

$$U^\perp = \{\textbf{alle } \mathbf{v} \textbf{ i } \mathbb{R}^n \textbf{ som er ortogonal på alle } \mathbf{u} \textbf{ i } U\}$$

- **$U^\perp$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$:**

- **$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$ for alle vektorer; altså er $\mathbf{0}$ i $U^\perp$** ✓

- **$\mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $U^\perp$: $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0$ for alle $\mathbf{u}$ i U; altså er $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ i $U^\perp$** ✓

- **$\mathbf{v}$ i $U^\perp$, a et reelt tall: $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = a \cdot 0 = 0$ for alle $\mathbf{u}$ i U; altså er $a\mathbf{v}$ i $U^\perp$** ✓

Ortogonalt komplement

La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom i $\mathbb{R}^n$

$$U^\perp = \{\textbf{alle } \mathbf{v} \textbf{ i } \mathbb{R}^n \textbf{ som er ortogonal på alle } \mathbf{u} \textbf{ i } U\}$$

Anta at $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ er en basis for U.

- **$\mathbf{v}$ ligger i $U^\perp$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ for alle basisvektorer $\mathbf{u}_i$.**

hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ for alle $\mathbf{u}$, så især også $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ ✓

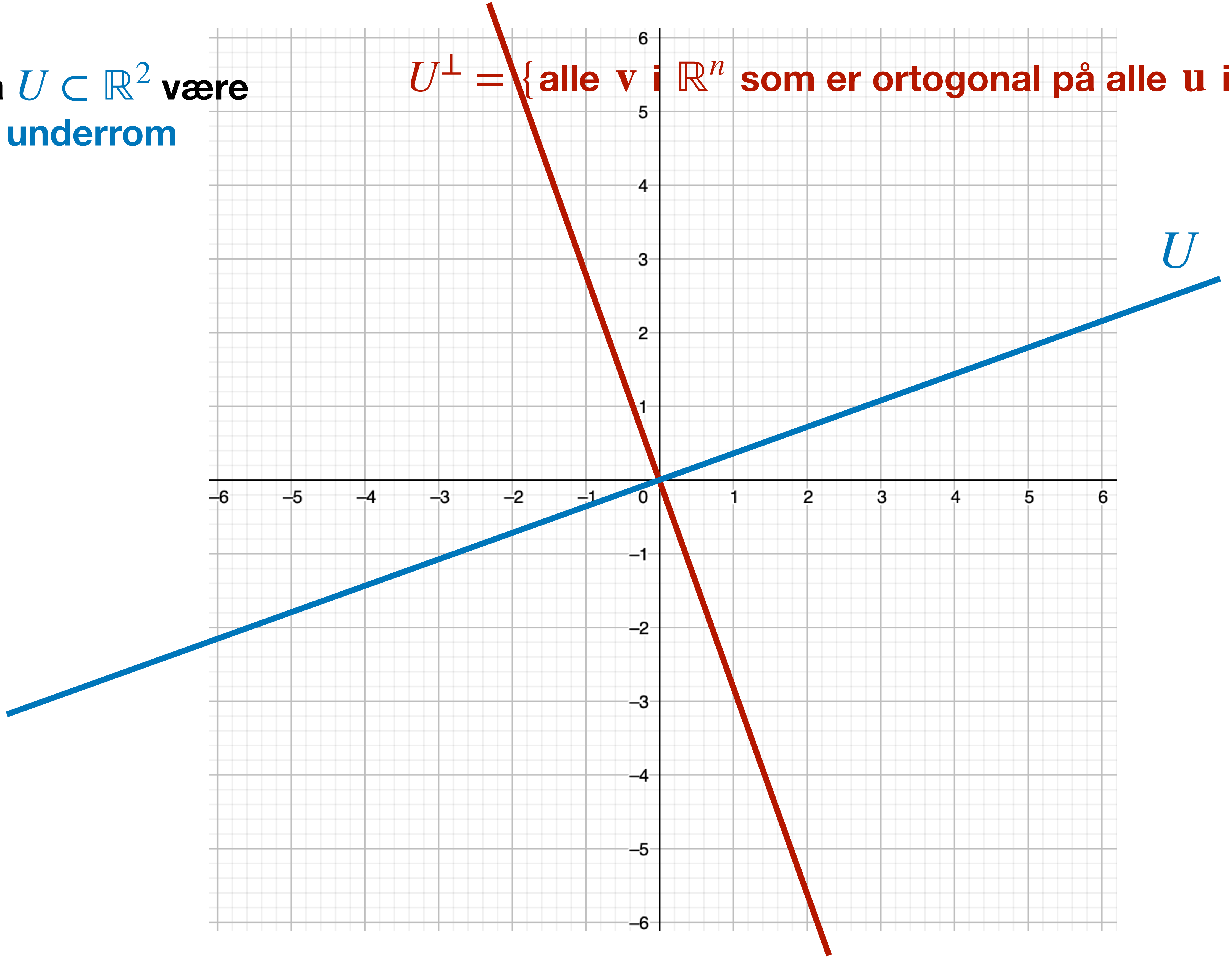
og hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ for alle $\mathbf{u}_i$, så også $\mathbf{v} \cdot (a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m) = 0$ ✓

alle $\mathbf{u}$ i U kan skrives sånn

Ortogonalt komplement i $\mathbb{R}^2$

La $U \subset \mathbb{R}^2$ være et underrom

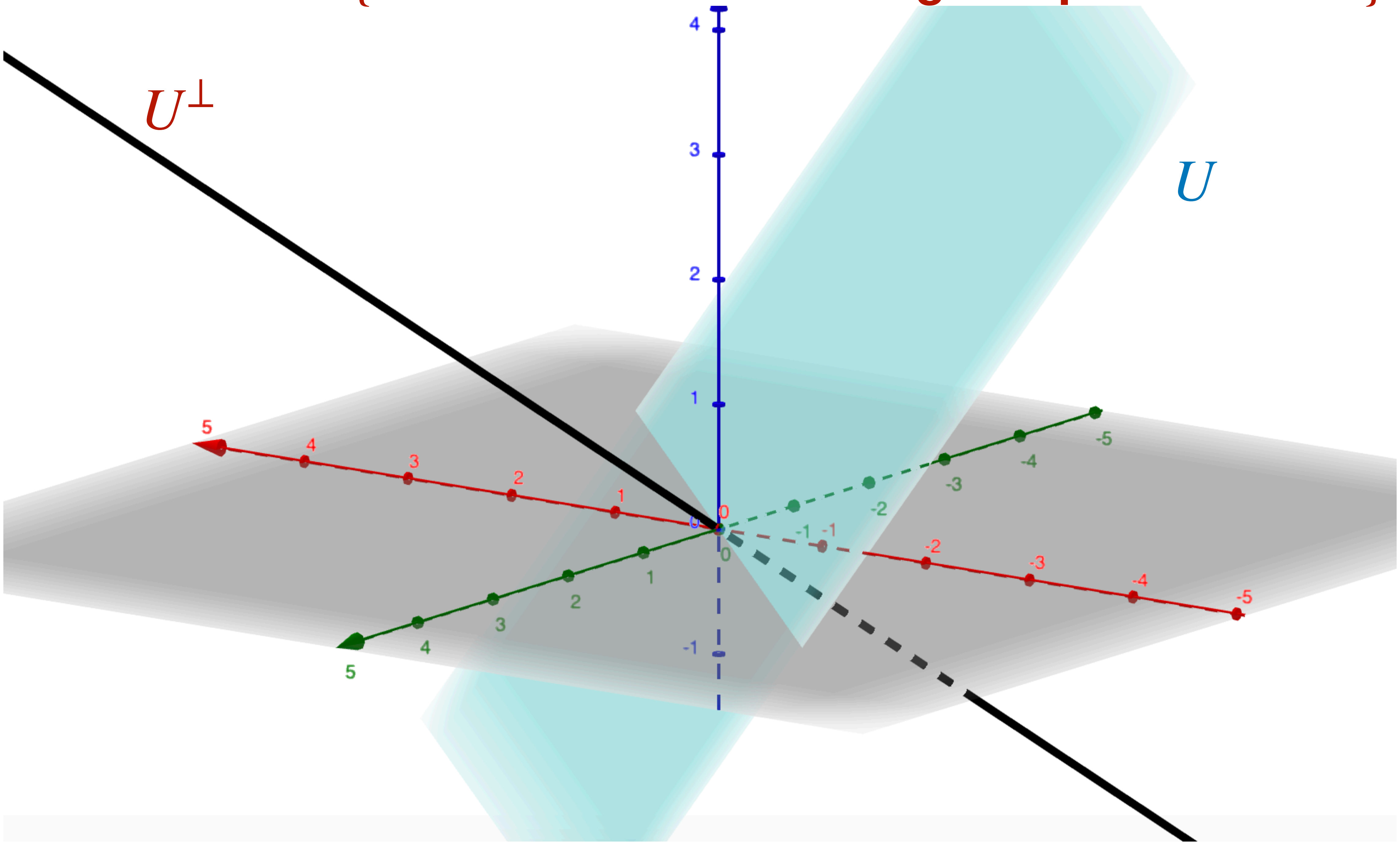
$U^{\perp} = \{$**alle $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonal på alle $\mathbf{u}$ i U**$\}$



Ortogonalt komplement i $\mathbb{R}^3$

La $U \subset \mathbb{R}^n$ **være et underrom i** $\mathbb{R}^n$

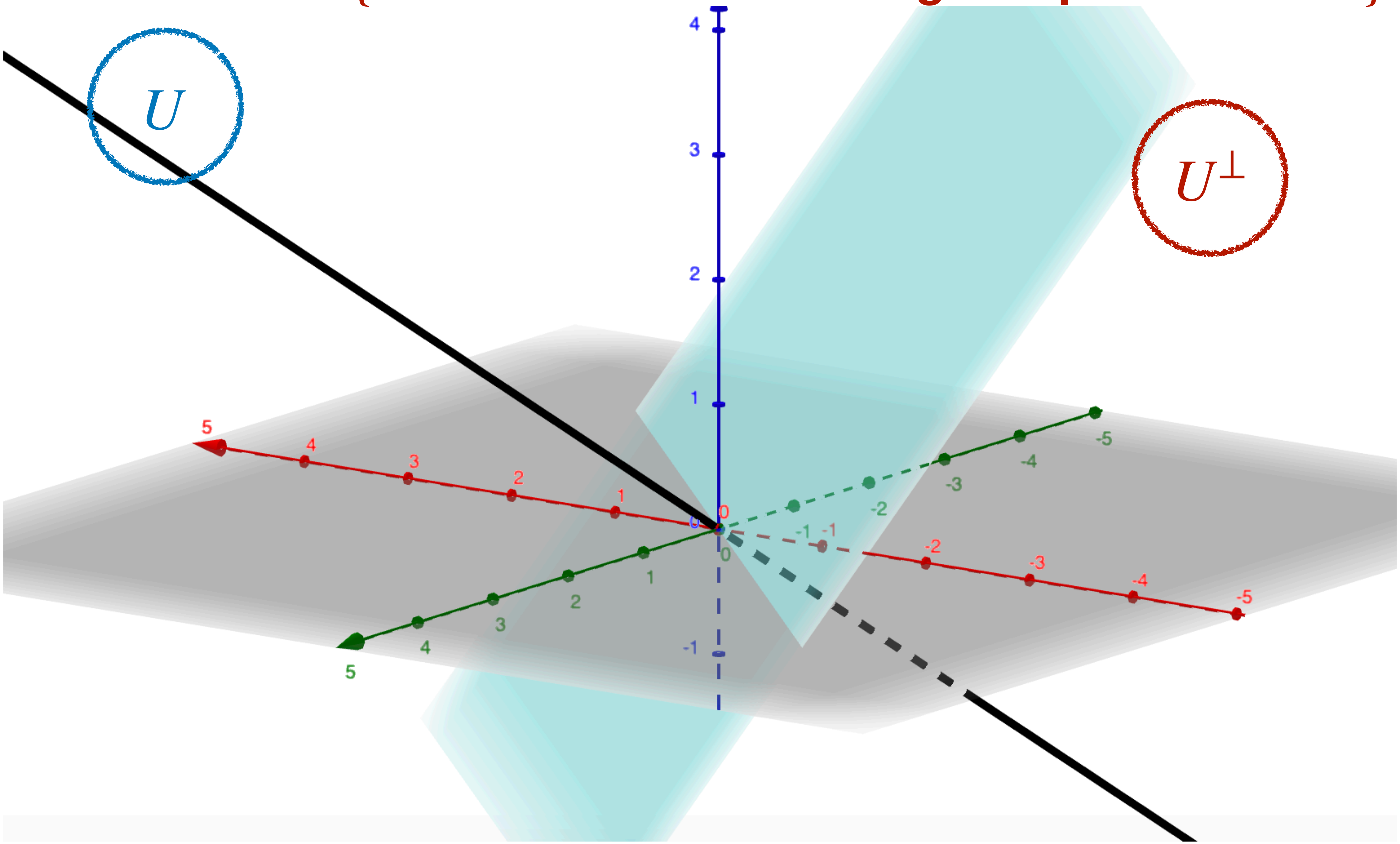
$$U^\perp = \{\text{alle } \mathbf{v} \text{ i } \mathbb{R}^n \text{ som er ortogonal på alle } \mathbf{u} \text{ i } U\}$$



Ortogonalt komplement i $\mathbb{R}^3$

La $U \subset \mathbb{R}^n$ **være et underrom i** $\mathbb{R}^n$

$$U^{\perp} = \{\textbf{alle } \mathbf{v} \textbf{ i } \mathbb{R}^n \textbf{ som er ortogonal på alle } \mathbf{u} \textbf{ i } U\}$$



Ortogonalt komplement

La $U \subset \mathbb{R}^n$ **være et underrom i** $\mathbb{R}^n$

$$U^\perp = \{\textbf{alle } \mathbf{v} \textbf{ i } \mathbb{R}^n \textbf{ som er ortogonal på alle } \mathbf{u} \textbf{ i } U\}$$

$$\boxed{\dim U + \dim U^\perp = n}$$

I $\mathbb{R}^3$**:**

$(\textbf{et plan})^\perp = \textbf{en linje}$

$(\textbf{en linje})^\perp = \textbf{et plan}$

Eksempel: $U = \{\textbf{planet i } \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

- **finne en basis for** U**:** $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$-v_1 + v_2 = 0$ **altså** $v_1 = v_2$ $\qquad$ $-v_1 + v_3 = 0$ **altså** $v_1 = v_3$

$$U^\perp = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \textbf{ i } \mathbb{R} \right\}$$

Ortogonalt komplement

La A være en reell $m \times n$-matrise.

$\mathrm{Col}\ A$ er underrommet i $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene i A

$\mathrm{Null}\ A$ er underrommet i $\mathbb{R}^n$ av løsningene til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\boxed{(\mathrm{Col}\ A)^{\perp} = \mathrm{Null}\ A^T}$$

$$\boxed{(\mathrm{Null}\ A)^{\perp} = \mathrm{Col}\ A^T}$$

transponerte matrisen:
kolonner $\leftrightarrow$ rader

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(\mathrm{Col}\ A)^{\perp} = ?}$$

$$A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{Null}\ A^T = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \textbf{ i } \mathbb{R} \right\}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner - Indreproduktrom

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

reelt tall!

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$$

skalarprodukt av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$

eller prikkprodukt

Skalarproduktet er utrolig nyttig!

Skalarproduktet reflekter geometrien i $\mathbb{R}^n$

- lengde: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$
- avstand mellom vektorer: $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w})}$
- ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
- ortogonale basiser, projeksjoner, …

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

Skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$ har egenskapene at

symmetri

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$

positivitet

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ for alle $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$

og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

kun nullvektoren har lengde 0

linearitet

- $\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$ og alle reelle tall a, b

- Dette vil vi nå generalisere til generelle vektorrom ...

Indreproduktrom

Anta at V er et $\boxed{\text{reelt}}$ vektorrom.

V sammen med et indreprodukt kalles et indreproduktrom

- Et indreprodukt i V er en operasjon som tar inn to vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ og gir ut et reelt tall $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ med egenskapene:

symmetri — $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ for alle $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i V

positivitet — $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V

og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet — $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V og alle reelle tall a, b

Eksempel: $V = \mathbb{R}^n$ med $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

Indreproduktrom

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V

indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$

positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

kun nullvektoren har lengde 0

Indreprodukter er utrolig nyttige!

- Vi kan definere en lengde for vektorer: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- avstand mellom vektorer: $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle}$
- Vi definerer at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

Merk: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$ for alle $\mathbf{v}$.

fordi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{v}, 0\mathbf{v} \rangle \overset{\text{linearitet}}{=} 0\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$

Indreproduktrom

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V

indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$

positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

- Vi definerer at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

Hva skjer her egentlig?

skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

geometri i $\mathbb{R}^n$

algebra i $\mathbb{R}$

geometri i V

lengde

avstand

ortogonal

indreprodukt i V

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Gram-Schmidt og Projeksjon i Indreproduktrom

Indreproduktrom

Indreproduktrom V $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

- En mengde med vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ i V som **ikke** er nullvektorer kalles en ortogonal mengde dersom

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \text{ når } i \neq j$$

samme bevis som for vektorer i $\mathbb{R}^n$

- En ortogonal mengde er lineært uavhengig.

- En ortogonal mengde som er en basis for V kalles en ortogonal basis.

Indreproduktrom

Indreproduktrom V $\quad$ $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V $\quad$ indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ $\quad$ positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ $\quad$ ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

- Gram-Schmidts metode fungerer akkurat som for skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$:

Anta: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uavhengige i V

- sett $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
- sett $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1$
- sett $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2$
- $\vdots$ $\quad$ fortsett prosessen til vi får $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ som danner en ortogonal mengde

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ danner en ortogonal basis for $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$

Indreproduktrom

Indreproduktrom V $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

La V være et indreproduktrom med en ortogonal basis $\mathscr{B} = \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. La $\mathbf{v}$ være en vektor i V.

- **Koordinatene** $a_1, \ldots, a_m$ **til $\mathbf{v}$ med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ er**

$$a_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \qquad a_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \qquad \ldots \qquad a_m = \frac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle}$$

dvs $\mathbf{v} = \dfrac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 + \ldots + \dfrac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle}\mathbf{u}_m$ og $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \\ \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle} \end{bmatrix}$

Indreproduktrom

Indreproduktrom V $\quad$ $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V $\quad$ indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ $\quad$ positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ $\quad$ ortogonal $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

La $U \subset V$ være et underrom i indreproduktrom V med en ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. La $\mathbf{w}$ være en vektor i V.

- Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{w}$ på U er

$$P_U(\mathbf{w}) = P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{w}) + P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{w}) + \ldots + P_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{w})$$

$$= \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle}\mathbf{u}_m$$

- $P_U(\mathbf{w})$ er punktet i U med kortest avstand til $\mathbf{w}$.

målt med hensyn til $\langle \ , \ \rangle$

Indreproduktrom

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ **ortogonal** $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

ortogonal projeksjon på U: $P_U(\mathbf{w}) = P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{w}) + P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{w}) + \ldots + P_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{w})$

La $U \subset V$ **være et underrom i indreproduktrom** V **med en ortogonal basis** $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$.

hva er $\boxed{\text{Ker } P_U = ?}$

lineærtransformasjon

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, bend left, "P_U"] & & U \\ \mathbf{w} \arrow[rr, bend right, mapsto] & & P_U(\mathbf{w}) \end{tikzcd}$$

$$\text{Ker } P_U = \left\{ \mathrm{w} \text{ i } V \;\middle|\; \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle}\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \right\}$$

lineær uavhengighet av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$

$$= \{ \mathrm{w} \text{ i } V \mid \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle = \ldots = \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{w} \rangle = 0 \}$$

$$= \{ \mathrm{w} \text{ i } V \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \text{ i } U \} = U^{\perp}$$

Indreproduktrom

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ **ortogonal** $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

ortogonal projeksjon på U**:** $P_U(\mathbf{w}) = P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{w}) + P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{w}) + \ldots + P_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{w})$

La $U \subset V$ være et underrom i indreproduktrom V med en ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$.

$\boxed{\text{Ker } P_U = U^{\perp}}$

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{P_U} & U \\
\mathbf{w} & \longmapsto & P_U(\mathbf{w})
\end{array}
$$

lineærtransformasjon

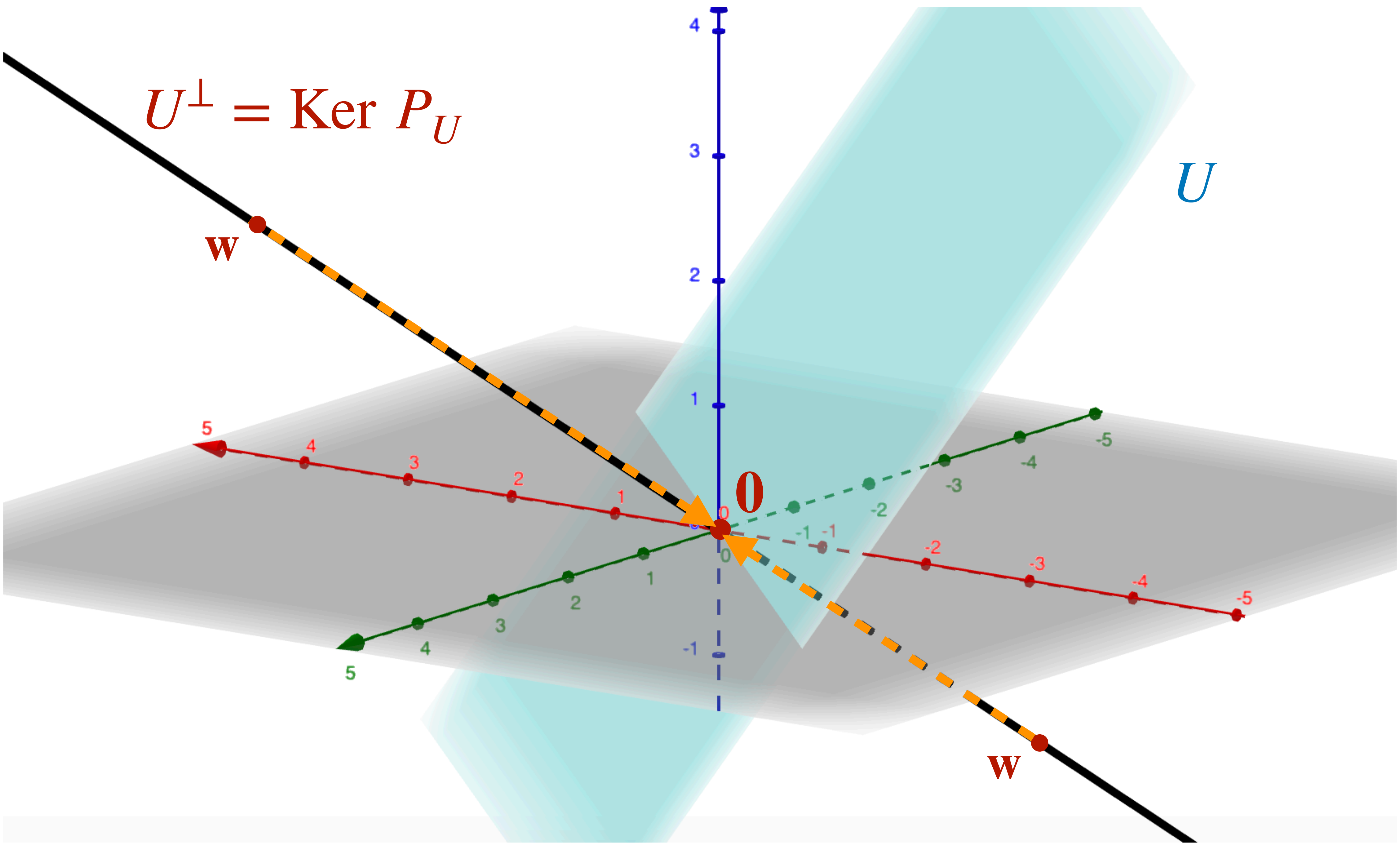
$$\text{Ker } P_U = \left\{ \mathrm{w} \text{ i } V \;\middle|\; \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m \rangle}\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \right\}$$

$$= \left\{ \mathrm{w} \text{ i } V \mid \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle = \ldots = \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{w} \rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \mathrm{w} \text{ i } V \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \text{ i } U \right\} = U^{\perp}$$

Ker P_U i $\mathbb{R}^3$

La $U \subset \mathbb{R}^3$ være et underrom i $\mathbb{R}^3$



NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner - Indreprodukt på funksjoner

Indreproduktrom

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V

indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$

positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, c\mathbf{w} + d\mathbf{u} \rangle = c\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + d\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

$$V = \mathscr{C}([a, b]) = \{f\colon [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

Vi definerer et indreprodukt i V:

a og b er gitt og tallet
$\langle f, g \rangle$ avhenger av dem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

Indreproduktrom

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ **positivitet:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ **og** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- **Symmetri** ✓

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)f(t)dt \quad = \langle g, f \rangle$$

$f(t)g(t) = g(t)f(t)$

Indreproduktrom

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ **positivitet:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ **og** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

- **Linearitet** ✓

$$\langle f, g+h \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)(g(t)+h(t))dt$$

reglene for $\int_a^b$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)h(t)dt \quad = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

$$\langle f, cg \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)cg(t)dt \quad = c\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt \quad = c\langle f, g \rangle$$

Indreproduktrom

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ **positivitet:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ **og** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

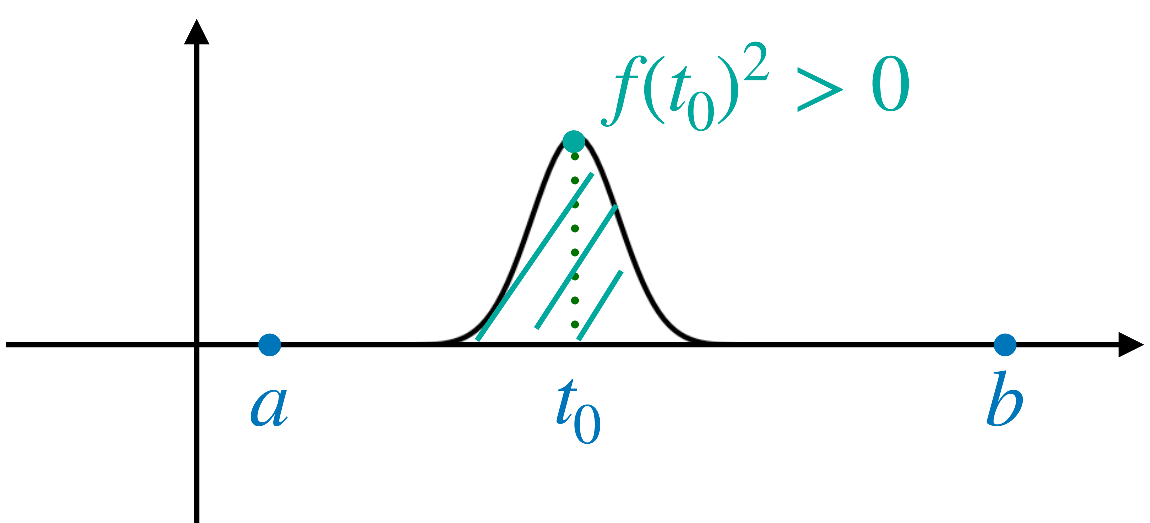
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

- **Positivitet** ✓

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$$

$f(t)^2 \geq 0$

og hvis $\langle f, f \rangle = 0$**, så må** $f = \mathbf{0}$



fordi dersom det fantes t_0 **med** $f(t_0)^2 > 0$**,**
så blir arealet under kurven $f(t)^2$ **strikt større enn** 0

Indreproduktrom

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

gjør det mulig å tenke geometrisk i $\mathscr{C}([a,b])$!

- **Lengde av en funksjon** f: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$
- **Avstand mellom** f **og** g: $\|f-g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle}$
- f **og** g **er ortogonale** $\iff \langle f, g\rangle = 0$

forenkler å finne lineært uavhengige funksjoner og koordinater for funksjoner

gjør det mulig å dele opp kompliserte funksjoner i enkle funksjoner (Fourier-analyse)

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig** $\}$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- **Lengde av en funksjon** f**:** $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

Eksempel: $a = 0,\ b = 2\pi, f(t) = \sin t$

$$\boxed{\|\sin\| = \sqrt{\langle \sin, \sin\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^2 dt \quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt$$

$$(\sin t)^2 = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4}0\right) = \frac{1}{2}$$

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig** $\}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- f **og** g **er ortogonale** $\iff \langle f, g \rangle = 0$

$\boxed{\sin \text{ og } \cos \text{ er ortogonale}}$

Eksempel: $a = 0,\ b = 2\pi, f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin t)(\cos t)dt \ = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 ydy$$

$(\sin t)' = \cos t, y(t) = \sin t$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(\sin t)^2\right]_0^{2\pi} = 0$$

Indreproduktrom

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \textbf{ er kontinuerlig}\}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- f **og** g **er ortogonale** $\iff \langle f, g\rangle = 0$

f **og** g **er ikke ortogonale**

Eksempel: $a = 0,\ b = 2\pi, f(t) = \sin t,\ g(t) = t$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sin t dt \quad = -\frac{1}{2\pi}[t\cos t]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t dt$$

$u(t) = t,\ v'(t) = \sin t$

$$= -\frac{1}{2\pi}[t\cos t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}[\cos t]_0^{2\pi} = -1$$

Indreproduktrom

$$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ **er kontinuerlig** } \}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- **Gram-Schmidt:** $U = \mathrm{Sp}\{f, g\}$

f **og** g **er lineært uavhengige, men ikke ortogonale**

Eksempel: $a = 0,\ b = 2\pi, f(t) = \sin t,\ g(t) = t$

- **vi setter** $h_1 = f$
- **vi beregner** $h_2 = g - \dfrac{\langle f, g\rangle}{\langle f, f\rangle} f$

$$h_2(t) = t - \frac{\langle \sin t, t\rangle}{\langle \sin t, \sin t\rangle}\sin t$$

$$= t - \frac{-1}{1/2}\sin t \quad = t + 2\sin t$$

$h_1(t) = \sin t$ **og** $h_2(t) = t + 2\sin t$ **danner en ortogonal basis for** U

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Ortogonal projeksjon av funksjoner

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig** $\}$

Vi har definert et indreprodukt i V**:**

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Vi ser på $a = 0,\ b = 2\pi$ **og vil studere projeksjoner på underrom i** V**.**

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([0,2\pi]) = \{f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig**$\}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

- **Vi vet allerede at** $\sin$ **og** $\cos$ **er ortogonale.**

funksjon som er konstant 1

- **Vi ser også at** 1 **og** $\sin$ **er ortogonale, og** 1 **og** $\cos$ **er ortogonale.**

$$\langle 1, \sin \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\langle 1, \cos \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{1}{2\pi}\left[\sin t\right]_0^{2\pi} = 0$$

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([0,2\pi]) = \{f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig** $\}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

funksjon som er konstant 1

- **Vi vet altså at** $\{1, \cos t, \sin t\}$ **er en ortogonale mengde.**

- $\sin(nt)$ **og** $\sin(mt)$ **er ortogonale for alle** $m, n \geq 1$, $m \neq n$. ✓

$$\langle \sin(nt), \sin(mt) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(mt - nt) - \cos(nt + mt))dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(mt - nt)}{m - n} - \frac{\sin(nt + mt)}{m + n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Indreproduktrom

$V = \mathscr{C}([0,2\pi]) = \{f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f$ **er kontinuerlig** $\}$

funksjon som
er konstant 1

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

- **Vi vet altså at** $\{1, \cos t, \sin t\}$ **er en ortogonale mengde.**

- $\sin(nt)$ **og** $\cos(mt)$ **er ortogonale for alle** $m, n \geq 1$**.** ✓

$$\langle \sin(nt), \cos(mt) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(mt)dt$$

$2 \sin \alpha \cos \beta$
$= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin(nt + mt) + \sin(nt - mt))dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(nt + mt)}{n + m} - \frac{\cos(nt - mt)}{n - m} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Indreproduktrom

$$V = \mathscr{C}([0,2\pi]) = \{f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\}$$

funksjon som
er konstant 1

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

- **Vi vet altså at** $\{1, \cos t, \cos(2t), \cos(3t), \ldots, \sin t, \sin(2t), \ldots\}$ **er en ortogonale mengde i** V.

- **For hvert** $n \geq 1$ **definerer vi et underrom** U_n **i** V:

$$U_n = \mathrm{Sp}\{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(nt), \sin t, \ldots, \sin(nt)\}$$

projeksjon
av f på U_n

f en funksjon i V $\qquad P_{U_n}(f) \qquad = n$te **Fourier-approksimasjon av** f

funksjon i U_n med
minst avstand til f

Indreproduktrom $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

$$U_n = \mathrm{Sp}\{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(nt), \sin t, \ldots, \sin(nt)\}$$

projeksjon
av f på U_n

f en funksjon i V $\qquad P_{U_n}(f) = n$te **Fourier-approksimasjon** av f

funksjon i U_n med
minst avstand til f

$$P_{U_n}(f) = a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos(nt) + b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin(nt)$$

koeffisientene fra formelen for funksjon i $P_{U_n}(f)$

med $\quad a_0 = \dfrac{\langle 1, f \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \qquad a_k = \dfrac{\langle \cos(kt), f \rangle}{\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle} \qquad b_k = \dfrac{\langle \sin(kt), f \rangle}{\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle}$

Indreproduktrom $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

$$U_n = \mathrm{Sp}\{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(nt), \sin t, \ldots, \sin(nt)\}$$

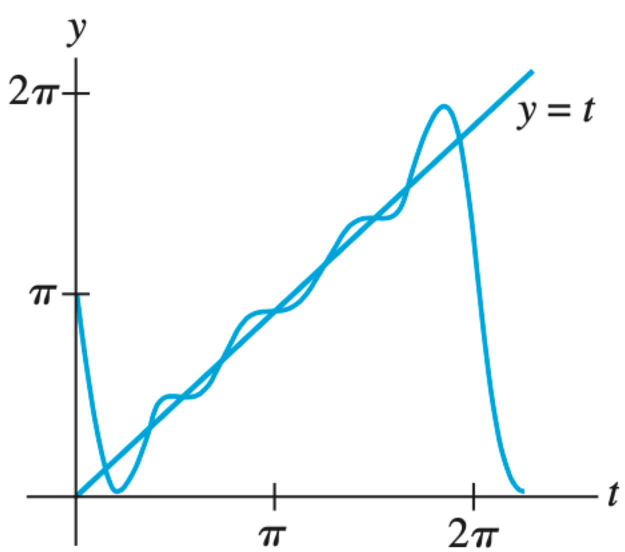
$$P_{U_n}(f) = a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos(nt) + b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin(nt)$$

med $a_0 = \dfrac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle}$ $\quad a_k = \dfrac{\langle \cos(kt), f\rangle}{\langle \cos(kt), \cos(kt)\rangle}$ $\quad b_k = \dfrac{\langle \sin(kt), f\rangle}{\langle \sin(kt), \sin(kt)\rangle}$

Eksempel: $f(t) = t$

f **er en odd funksjon** $\quad$ $a_k = 0$ **for** $k \geq 1$

$$P_{U_n}(f) = \pi - 2\sin t - \sin(2t) - \frac{2}{3}\sin(3t) - \ldots - \frac{2}{n}\sin(nt)$$



$n = 4$ **(bildet fra Lays bok)**

Indreproduktrom $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

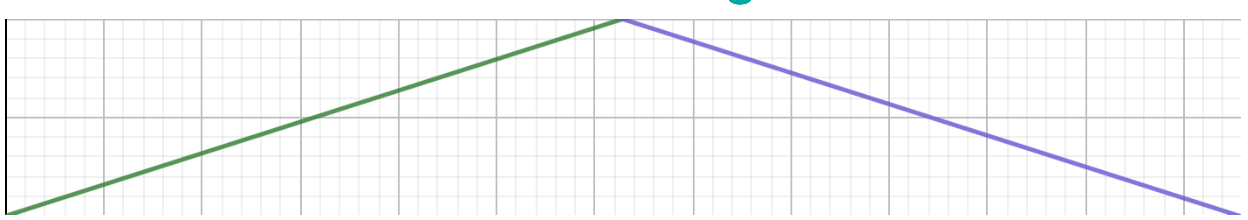
$$U_n = \mathrm{Sp}\{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(nt), \sin t, \ldots, \sin(nt)\}$$

$$P_{U_n}(f) = a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos(nt) + b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin(nt)$$

med $a_0 = \frac{\langle 1, f \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$ $\quad a_k = \frac{\langle \cos(kt), f \rangle}{\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle}$ $\quad b_k = \frac{\langle \sin(kt), f \rangle}{\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle}$

Eksempel: $f(t) = \begin{cases} t/\pi & 0 \leq t \leq \pi \\ 2 - t/\pi & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

Trekantbølge



$a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_k = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 k^2} & k \textbf{ oddetall} \\ 0 & k \textbf{ partall} \end{cases}$ $\quad b_k = 0$ **for** $k \geq 1$

$$P_{U_{2m+1}}(f) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \cos t - \frac{2}{\pi^2 3^2} \cos(3t) - \ldots - \frac{2}{\pi^2 (2m+1)^2} \cos((2m+1)t)$$

Lekse: plot grafen til $P_{U_{2m+1}}(f)$

Indreproduktrom $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$

$$U_n = \mathrm{Sp}\{1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(nt), \sin t, \ldots, \sin(nt)\}$$

$$P_{U_n}(f) = a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos(nt) + b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin(nt)$$

med $a_0 = \frac{\langle 1, f \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \qquad a_k = \frac{\langle \cos(kt), f \rangle}{\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle} \qquad b_k = \frac{\langle \sin(kt), f \rangle}{\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle}$

Teorem i Fourier-Analyse:

$\|f - P_{U_n}(f)\| \longrightarrow 0$ **når** $n \longrightarrow \infty$

avstanden mellom f og U_n
blir mindre og mindre
når n blir større og større

merk at vi øker dimensjonen til U_n
når n blir større fordi $\dim U_n = 2n + 1$

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Matematikk 3

Projeksjoner - Komplekse Indreproduktrom

Indreprodukt i $\mathbb{C}^n$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ vektorer i $\mathbb{C}^n$

Hva er indreproduktet av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$?

Hva med $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$?

Fungerer ikke!

Eksempel: For $n = 1$, dvs $\mathbb{C}$, og vektor $\mathbf{v} = e^{i\pi/4}$ er

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = e^{i\pi/4} \cdot e^{i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$ ikke et reelt tall.

Ønskeliste:

- et tall ✓
- enkelt å beregne ✓
- linearitet ✓
- symmetri ✓

reelle tall!

- ~~positivitet ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$)~~

Det burde gi oss:

- ~~lengde av vektorer~~
- ortogonale vektorer
- ~~geometri~~ i komplekse vektorrom

Indreprodukt i $\mathbb{C}^n$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ vektorer i $\mathbb{C}^n$

husk at et komplekst tall $z = r + is$ har et **komplekskonjugert tall** $\bar{z} = r - is$

Vi definerer **indreproduktet** av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ som det komplekse tallet

$$\boxed{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{v_1} w_1 + \overline{v_2} w_2 + \ldots + \overline{v_n} w_n}$$

Merk: man kan også komplekskonjugere $\mathbf{w}$ og får et indreprodukt!

- vi sjekker: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \overline{v_1} v_1 + \overline{v_2} v_2 + \ldots + \overline{v_n} v_n$
  $= |v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2 \geq 0$

reelt tall!

- positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ ✓
- lengde: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ ✓

$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = e^{-i\pi/4} \cdot e^{i\pi/4} = 1$

Men vi betaler også en liten pris…

Indreprodukt i $\mathbb{C}^n$

Indreproduktet i $\mathbb{C}^n$ har egenskapene at

positivitet • $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ for alle $\mathbf{v}$ i $\mathbb{C}^n$

og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ kun nullvektoren har lengde 0

linearitet • $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $\mathbb{C}^n$ og alle komplekse tall a, b

symmetri • $\boxed{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}}$ for alle $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $\mathbb{C}^n$

vi får da også: • $\langle \mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

$\boxed{\bullet\ \langle a\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \bar{a}\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

Indreproduktrom

Anta at V er et komplekst vektorrom.

V sammen med et indreprodukt kalles et indreproduktrom

- Et indreprodukt i V er en operasjon som tar inn to vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ og gir ut et komplekst tall $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ med egenskapene:

symmetri

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$ for alle $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i V

positivitet

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V

og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet

- $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V og alle komplekse tall a, b

- $\langle \mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

- $\boxed{\langle a\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \overline{a}\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

Indreproduktrom

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V

indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

kun nullvektoren har lengde 0

Indreprodukter er utrolig nyttige!

- Vi kan definere en lengde for vektorer: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- avstand mellom vektorer: $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle}$
- Vi definerer at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

Indreprodukt i $\mathbb{C}^n$

$\mathbf{v}$ **og** $\mathbf{w}$ **vektorer i** $\mathbb{C}^n$ **indreprodukt:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{v_1} w_1 + \ldots + \overline{v_n} w_n$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ **symmetri:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

- **For fast** $\mathbf{v}$ **i** $\mathbb{C}^n$**:**

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{T} \mathbb{C}$$

$$\mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = T(\mathbf{w})$$

$\boxed{\textbf{lineærtransformasjon}}$

standardmatrise A_T**?** A_T **er en kompleks** $1 \times n$**-matrise**

første kolonne…

$T(\mathbf{e}_1) = \overline{v_1}$ $T(\mathbf{e}_2) = \overline{v_2}$ $\ldots$ $T(\mathbf{e}_n) = \overline{v_n}$

$$A_T = \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \ldots & \overline{v_n} \end{bmatrix} = \mathbf{v}^*$$

symbolet * **betyr at**
en matrise blir transponert og
alle elementer komplekskonjguert

$$\boxed{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^* \mathbf{w}}$$

matrisemultiplikasjon

Indreproduktrom

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vektorer i V

indreprodukt: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

symmetri: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

positivitet: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

linearitet: $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

Vi kan gjøre nesten alt vi gjorde i reelle indreproduktrom også i komplekse indreproduktrom.

- Gram-Schmidt
- Ortogonal projeksjon på underrom
- ...

Når A er en kompleks $m \times n$-matrise:

der * betyr at A blir transponert og alle elementer blir komplekskonjguert

$$\boxed{(\mathrm{Col}\ A)^{\perp} = \mathrm{Null}\ A^*}$$