NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3 (Løsningsforslag)**

Faglig kontakt under eksamen: Gereon Quick[a], Morten Solberg[b]

Tlf: [a] tlf Gereon , [b] tlf Morten

Eksamensdato: 1. desember 2021

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 9

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle røttene til $p(z) = z^4 + 16$ og skissér de i det komplekse plan. Faktorisér $p(z)$ i lineære faktorer.
Løsningsforslag: Vi ønsker å løse likningen $z^4 + 16 = 0$. Hvis vi setter $z = re^{i\theta}$ kan vi skrive dette som

$$r^4 e^{4i\theta} = -16 = 16e^{i\pi}.$$

Da får vi at $r = \sqrt[4]{16} = 2$, og at $4i\theta = i\pi + 2n\pi i$ for et heltall n. Altså har vi

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$$

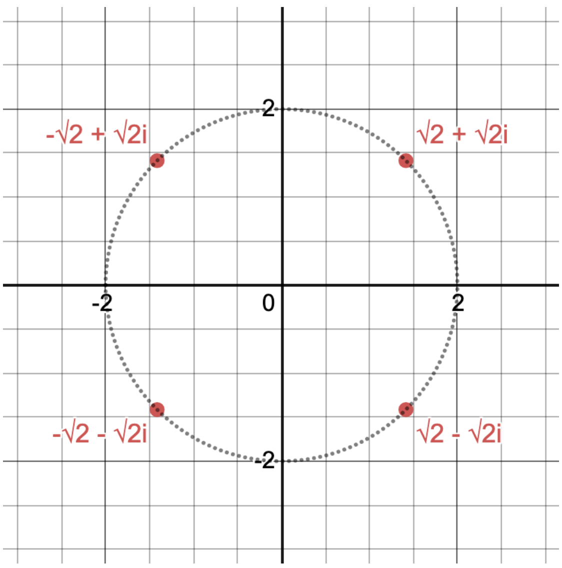
Løsningene for θ i intervallet $[0, 2\pi)$ blir da $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, og $\frac{7\pi}{4}$. Som gir oss røttene

$$\begin{aligned}
2e^{i\pi/4} &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\
2e^{3i\pi/4} &= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\
2e^{5i\pi/4} &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\
2e^{7i\pi/4} &= \sqrt{2} - \sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

Røttene gir oss en faktorisering av $p(z)$ i lineære faktorer ved

$$p(z) = (z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{2} + \sqrt{2}i).$$

Plotter vi røttene i det komplekse plan vil vi få et bilde slik det vist under.



Oppgave 2 Se på de tre punktene

$$(0,-3),(1,-1) \text{ og } (2,5)$$

i $\mathbb{R}^2$.
Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene og finn ved hjelp av minste kvadraters metode førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.

Løsningsforslag: La $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen som evaluerer et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ i de tre punktene $x = 0$, $x = 1$, og $x = 2$. Da har vi at

$$T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Følgelig vil matrisen til T med hensyn på standardbasisen $\{x^2, x, 1\}$ være

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da kan vi finne $p(x)$ ved å løse systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Altså, har vi at $p(x) = 2x^2 - 3$. Hvis vi dobbeltsjekker ser vi at $p(0) = -3$, $p(1) = -1$, og $p(2) = 5$, slik oppgaven ber om.

Gjør vi det tilsvarende for førstegradspolynom $q(x) = dx + e$ får vi systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Dette har ingen løsning, så vi anvender minste kvadraters metode

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -11/3 \end{array}\right].$$

Førstegradspolynomet $q(x)$ som best passer punktene blir da $q(x) = 4x - 11/3$.

Oppgave 3 La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 4 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 6 & a+1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn alle reelle tall a slik at $\det A \neq 0$. Bestem dimensjonen til $\operatorname{Col} A$ (kolonnerommet til A) for alle verdier av a.

Løsningsforslag: Vi kan beregne determinanten for eksempel ved å utvikle langs den første kolonnen:

$$\begin{aligned} \det A &= (a-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a & 1 \\ 6 & a+1 \end{bmatrix}\right) = (a-1) \cdot (a \cdot (a+1) - 6) \\ &= (a-1) \cdot (a^2 + a - 6) = (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a+3) \end{aligned}$$

Vi får altså $\det A = 0$ bare hvis $a = 1$ eller $a = 2$ eller $a = -3$. For alle andre verdier er $\det A \neq 0$.

Hvis vi har $\det A \neq 0$, er A inverterbar og $\dim \operatorname{Col} A = 3$. For $a = 1$ er den andre og tredje kolonnen lineært uavhengige, fordi $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ikke er en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Altså er $\dim \operatorname{Col} A = 2$ for $a = 1$.

Hvis $a = 2$ eller $a = -3$, så er den første og tredje kolonnen lineært uavhengige. Altså er da $\dim \operatorname{Col} A = 2$ i disse tilfellene også. Det gir oss alle muligheter for $\dim \operatorname{Col} A$.

b) Avhengig av a, finn alle reelle tall b slik at systemet

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}$$

har en løsning.

Løsningsforslag: Dersom a ikke er en av verdiene 1, 2 eller -3, så er A inverterbar og alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i $\operatorname{Col} A$. Altså har systemet i dette tilfellet en løsning for alle verdier for b.

Dersom a er lik en av 1, 2 eller -3, så må vi sjekke for hvilke b vektoren $\begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}$ er i kolonnerommet til A. For $a = 1$ er den første kolonnen nullvektoren og vi må løse

$$x_2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ved å se på første og tredje raden får vi at vi må ha $x_2 = 1$ og $x_3 = 1$. I dette tilfellet får vi altså en løsning hvis og bare hvis $b = 2$.

For $a = 2$ er den andre kolonnen lik to gang den tredje og vi må løse

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ved å se på første og tredje raden får vi at vi må ha $x_3 = 8/3$ og $x_1 = 2/3$. I dette tilfellet får vi altså en løsning hvis og bare hvis $b = 8/3$ også.

For $a = -3$ må vi løse

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ved å se på første og tredje raden får vi at vi må ha $x_3 = -4$ og $x_1 = -7/2$. I dette tilfellet får vi altså en løsning hvis og bare hvis $b = -4$.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Gi en geometrisk beskrivelse av hva denne lineærtransformasjonen gjør og regn ut A^{2021}.

Løsningsforslag: Hvis vi regner ut hva A gjør med standardbasisvektorene ser vi at A roterer dem rundt origo med en vinkel på $\frac{2\pi}{3}$. Det betyr at når vi ganger med A^3 roterer vi med en vinkel på $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$. Dette er det samme som å gjøre ingenting, med andre ord er A^3 lik 2×2-identitetsmatrisen. Nå observerer vi at 2022 kan deles på 3 (eller at $2021 = 3 \cdot 673 + 2$). Altså har vi $A^{2021} = A^2$. Dette kan vi regne ut som

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenverdiene til A og gi en geometrisk tolkning av at de ikke er reelle.

Løsningsforslag: Det karaktersitiske polynomet til A er gitt ved

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-\lambda - \frac{1}{2})(-\lambda - \frac{1}{2}) + \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{3}/2 \\ &= \lambda^2 + \lambda + 1 \end{aligned}$$

Vi kan deretter bruke abc-formelen til å finne egenverdiene:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

En reell egenvektor spenner ut en linje som forblir uendret når vi ganger med matrisen vår. Siden egenverdiene ikke er reelle, finnes det ikke en linje i $\mathbb{R}^2$ som forblir uendret når vi ganger med A. Det er noe vi visste også på grunn av den geometriske tolkningen for A vi fant i den første delen. For A representerer en rotasjon med vinkel $\frac{2\pi}{3}$ rundt origo, og for en slik rotasjon finnes det ingen linjer som blir uendret.

Oppgave 5 La $V = \mathcal{C}[0,1]$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, og betrakt underrommet $U = \mathrm{Sp}\{1, x\}$. La $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Dette er et indreprodukt for $V = \mathcal{C}[0,1]$.

a) Finn en ortogonal basis for U.

Løsningsforslag: For å finne en ortognal basis bruker vi Gram–Schmidt. Vi velger vår første basisvektor til å være $\mathbf{u}_1 = 1$, og beregner den andre til å være

$$\mathbf{u}_2 = x - \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1.$$

For å gjøre dette må vi altså bergene de to indreproduktene

$$\langle 1, x\rangle = \int_0^1 1 \cdot x \; dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 \; dx = [x]_0^1 = 1$$

Vi får da en ortogonal basis $\{1, x - \frac{1}{2}\}$.

b) La $h(x) = e^x$. Finn $\mathrm{Proj}_U(h(x))$.
Hint: $((x-1)e^x)' = xe^x$.

Løsningsforslag: For å beregne projeksjonen av $h(x)$ ned på U, projiserer vi ned på hver enkelt basisvektor i den ortogonale basisen vår. Altså har vi

$$\mathrm{Proj}_U(h(x)) = \frac{\langle 1, h(x)\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 + \frac{\langle x - \frac{1}{2}, h(x)\rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle}(x - \frac{1}{2}) \tag{1}$$

Vi beregner indreproduktene:

$$\langle 1, h(x)\rangle = \int_0^1 1 \cdot e^x \; dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$
$$\langle x - \frac{1}{2}, h(x)\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^x \; dx = \left[(x-1)e^x - \frac{1}{2}e^x\right]_0^1 = \frac{3-e}{2}$$
$$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \; dx = \left[\frac{(x-1/2)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Putter vi disse in i (1) får vi

$$\mathrm{Proj}_U(h(x)) = e - 1 + 12 \cdot \frac{3-e}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = (18 - 6e)x - 10 + 4e.$$

Oppgave 6 Finn en reell 2×2-matrise A som hører til systemet av differensialligninger $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ med løsninger

$$e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ og } e^{2t}\left(\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Løsningsforslag: Oppgaveteksten gir oss at A har egenverdi 2, og en egenvektor som hører til egenverdi 2 er vektoren $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Fordi variablen t dukker opp i vektorene, har A bare én enkel reell egenverdi. Hvis vi begynner med at A er på formen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så får vi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vet dermed $a = 2$ og $c = 0$. Matrisen A er altså en øvre triangulær matrise. En slik matrise har egenverdiene på diagonalen. Fordi vi bare har egenverdi 2, må vi også ha $d = 2$. For å finne b kan vi en gang til bruke at vi kjenner løsningene. Vi vet allerede at systemet er på formen

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Nå skriver vi $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$ for den ene løsningen. Det gir oss især

$$2te^{2t} + be^{2t} = 2y_1(t) + by_2(t) = y_1'(t) = (te^{2t})' = 2te^{2t} + e^{2t}.$$

Hvis vi sammenligner begge sidene og husker at ligningen må gjelde for alle t, så får vi $b = 1$. Matrisen A er altså

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alternativt: Vi kan også begynne med et generelt system på formen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ay_1(t) + by_2(t) \\ y_2'(t) &= cy_1(t) + dy_2(t) \end{aligned}$$

og sette inn de to løsninger vi er gitt. Hvis $y_1(t) = te^{2t}$ og $y_2(t) = e^{2t}$ får vi:

$$\begin{aligned} y_1'(t) = 2te^{2t} + e^{2t} &= 2y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow a = 2 \text{ og } b = 1 \\ y_2'(t) = 2e^{2t} &= 2y_2(t) \Rightarrow c = 0 \text{ og } d = 2. \end{aligned}$$

Dette gir oss systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_2(t). \end{aligned}$$

Vi sjekker at $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$ også er en løsning for systemet.

Oppgave 7

La

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

Finn en inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$3A = A^2 - AB$$

og forklar hvorfor det ikke finnes en inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$2A = A^2 - AB$$

Løsningsforslag: Vi antar at det finnes en slik inverterbar matrise A. Isåfall finnes den inverse matrisen A^{-1} og hvis A oppfyller ligningen $3A = A^2 - AB$, så kan vi gange denne ligningen på begge sider med A^{-1} fra venstre side:

$$3A = A^2 - AB \Rightarrow 3(A^{-1}A) = A^{-1}A^2 - A^{-1}AB \Rightarrow 3I_3 = A - B \Rightarrow A = 3I_3 + B$$

der I_3 er 3×3-identitetsmatrisen. Når vi setter inn matrisen B, så får vi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nå vet vi altså at dersom en inverterbar matrise A eksisterer slik at $3A = A^2 - AB$, så må den ha denne formen. Det siste som gjenstår er å sjekke at denne matrisen faktisk er inverterbar. Det kan vi for eksempel ved å beregne determinanten:

$$\det A = 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-4 + 6) = 10 \neq 0.$$

Matrisen A er altså inverterbar og matrisen vi ville finne.

Hvis vi prøver å finne en **inverterbar** matrise A slik at $2A = A^2 - AB$ og bruker samme idéen som før, så får vi at matrisen også må oppfylle ligningen $2I_3 = A - B$ og dermed ville vi fått

$$A = 2I_3 + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Men denne matrisen er **ikke** inverterbar fordi

$$\det A = 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-6 + 6) = 0.$$

Antagelsen at det finnes en inverterbar matrise A slik at $2A = A^2 - AB$ fører altså til en motsigelse, og en slik matrise finnes ikke.