Innlevering 2 (frist 24. september)

Oppgaver til kapittel 2

1. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$$

grafisk, dersom det er mulig.

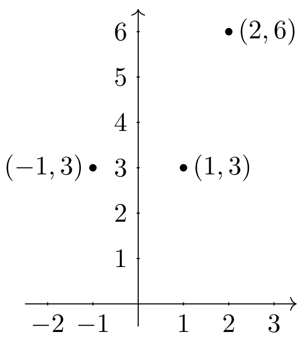
2. Er følgende to ligningssystemer ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

3. Er følgende to matriser radekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

4. La $(-1, 3)$, $(1, 3)$ og $(2, 6)$ være tre punkter i planet.



a) Finnes det et førstegradspolynom $f(x) = dx + e$ slik at de tre punktene ligger på grafen til f?

b) Finnes det et andregradspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, slik at de tre punktene ligger på grafen til f?

5. Se på ligningssystemet

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

der a, b, c, d, m og n er konstanter, og $ad \neq bc$.

a) Hvor mange løsninger har systemet?

b) Finn x og y uttrykt ved a, b, c, d, m og n.

6. Løs ligningssystemene.

a)

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 9z &= -38 \\ 4x - 3y + 8z &= -26 \\ -2x + 4y - 2z &= 17 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 4 \\ 2x + 8y + 16z &= 8 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (1+i)z - w &= i \\ (1-i)z + (1+i)w &= 1. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2z + iw + (5-3i)u &= 10 \\ 4z + 2iw + (10+2i)u &= 20 + 16i \\ 2iz - w + (4+6i)u &= 2 + 12i \end{aligned}$$

Oppgaver til kapittel 3

1. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ spenner ut $\mathbb{R}^3$, og løs likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$.

3. La p og q være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

a) La s være polynomet $s(x) = x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter a og b slik at

$$s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$$

for alle x?

b) Finn et andregradspolynom t som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom r skal det være mulig å finne konstanter a, b og c slik at

$$r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$$

Oppgaver til kapittel 4

1. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2×2-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

2. Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

3. La A og B være to 2×2-matriser. Betrakt ligningen

$$AX = B,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Forklar hvorfor ligningen er ekvivalent med å løse to 2×2-ligningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

b) Løs ligningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. La A, B og C være 2×2-matriser. Betrakt ligningen

$$AX + XB = C,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Hvorfor kan man *ikke* løse denne ligningen som to 2×2-ligningssystemer samtidig?

b) Skriv om ligningen til fire ligninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

c) Løs ligningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tallsvar

2.1) $x = 1$ og $y = 1$.

2.5a) Én løsning.

2.5b) $x = \frac{1}{ad-bc}(dm - bn)$ og $y = \frac{1}{ad-bc}(an - cm)$.

2.6a) $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$ og $z = -3$.

2.6b) $x = 4$, $y = -2t$ og $z = t$ der $t \in \mathbb{R}$.

2.6c) $w = 0$ og $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

2.6d) $u = 2$, $w = 2t$ og $z = (3 - t)i$ der $t \in \mathbb{R}$.

3.1a)

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t, r, q \in \mathbb{R}$$

3.1b) $x = \frac{83}{215}$, $y = \frac{187}{215}$, $z = \frac{156}{215}$

4.1) $A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

4.4c)

$$X = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$