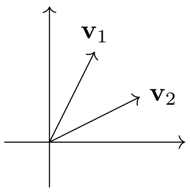
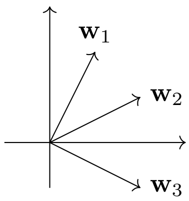
Innlevering 3 (frist 8. oktober)

Oppgaver til kapittel 5

1. De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.





I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

2. Er vektorene lineært uavhengige?

a)

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}2\\4\\2i\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}i\\2i\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5-3i\\10+2i\\4+6i\end{bmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 6

1. Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.

a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\2 & -4 & 7\\-6 & 15 & 1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2i & -5 & 3\\2 & -4i & 7\\-6 & 15 & i\end{bmatrix}$

2. Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

3. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix}a & b & 0 & 0\\c & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & x\\0 & 0 & y & z\end{bmatrix}.$$

a) Finn det A uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?

Oppgaver til kapittel 7

1. Avgjør om følgende delmengder i $\mathbb{R}^2$ er underrom av $\mathbb{R}^2$.

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$.

c) $\mathbb{Q}^2$

2. La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

b) Gjør det samme for matrisen B.

c) Avgjør om vektoren $(0, 1, -2, 3, -1, -1, 1)$ ligger i nullrommet til A, og om den ligger i nullrommet til B.

d) Avgjør om vektoren $(-1, -1, -1, -1)$ ligger i kolonnerommet til A, og om den ligger i kolonnerommet til B.

3.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$.

4. La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$? Begrunn hvorfor/hvorfor ikke.

b) Er planet som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$? Begrunn hvorfor/hvorfor ikke.

c) La $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{bmatrix}$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Avgjør om vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ligger i kolonnerommet til A. Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**.

5. La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \operatorname{Col} A > 0$

b) $\dim \operatorname{Null} A > 0$

Tallsvar

6.1a)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -3$$

6.1b)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ -6 & 15 & 1 \end{bmatrix}\right) = 20$$

6.1c)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2i & -5 & 3 \\ 2 & -4i & 7 \\ -6 & 15 & i \end{bmatrix}\right) = 300 - 264i$$

6.2a) Areal $= 3$

6.2b) Areal $= 0$

6.3a) $\det A = bcxy$

6.3b) $b, c, x, y \neq 0$