Innlevering 4 (frist 22. oktober)

Oppgaver til kapittel 8

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin x + \cos y \\ -\sin y \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^x + e^y$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z + 4w$

2. Finn standardmatrisen til lineærtransformasjonen

a) ... $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

b) ... $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3}{4}\pi$.

3. La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

4. La $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der} \quad q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n : \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n : \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

5. La $D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Hint: I Matematikk 1 lærte vi regneregler for derivasjon av i) en sum av to funksjoner og ii) en funksjon multiplisert med en konstant. Du kan bruke disse.

b) Finn kjernen $\ker D$ av lineærtransformasjonen D. Er $\ker D$ et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis.

c) Avgjør om D er surjektiv.
Hint: Analysens fundamentalteorem.

Oppgaver til kapittel 9

1. Avgjør hvilke vektorer som er ortogonale med hverandre.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Bruk Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

a) Vektorene oppgitt i oppgave 1a.

b) Vektorene oppgitt i oppgave 1b.

3. Hva blir den ortogonale projeksjonen av

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 1a?

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ned på underrommet utspent av vektorene gitt i oppgave 1b?

4. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

5. Beregn $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Hva er $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}))$ i del **a)-b)**?

Noen tallsvar

8.2a)

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8.2b)

$$[R] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8.3)

$$[S \circ R] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ og } [R \circ S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

9.2a)

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix} \right)$$

9.2b)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

9.3a) Hvis vi bruker basisen fra 9.2a):

$$\begin{bmatrix} 70/43 \\ 145/86 \\ 15/86 \end{bmatrix}$$

9.4) $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -8/5 \\ -16/5 \end{bmatrix}$, $\theta \approx 131.6°$

9.5a)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{11}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

9.5b)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$