Innlevering 5 (frist 5. november)

Oppgaver til kapittel 9

1. La $W = \mathrm{Sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en ortogonal basis for W.

b) Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ned på W.

c) Finnes det en 3×2–matrise A slik at $[P_W]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$? I så fall, finn den.
Hint: Tenk geometrisk her.

2. Vi ser på indreproduktrommet $\mathcal{C}[0, 1]$ av kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$, altså kontinuerlige funksjoner $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst?
Hint: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lengden til $f - g$.

c) Skissér x, $\cos x$ og $\sin x$ på intervallet $[0, 1]$. Gi en geometrisk forklaring på de numeriske verdiene du fant i del **a)**–**b)**.

3. Betrakt underrommet $U = \mathrm{Sp}\{1, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0, 1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Finn en ortogonal basis for U.

4.
Betrakt underrommet $V = \mathrm{Sp}\{1, x, e^x\}$ av $\mathcal{C}[0, 1]$, med indreprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

a) Finn en ortogonal basis for V.

b) La $h(x) = x^2$. Finn $g(x) = \mathrm{proj}_V\, h(x)$ og skisser $h(x)$ og $g(x)$ (obs: kan bli nokså ekle tall i denne oppgaven).
Hint:

$$\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$$

og

$$\int x^2e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Oppgaver til kapittel 10

1. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

2.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen reelle egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

3.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon.
Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en reell egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

4. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Hvis $Ax = \lambda x$, hva kan du da si om A^2x?
Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

Noen tallsvar

9.2a) Ca. 40° og ca. 3°

9.2b) Ca 0.55 og ca. 0.06

10.1a) Egenverdier: $3, -1$, egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

10.1b) Egenverdier: $3, -1, 0,$

egenvektorer: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

10.1c) Egenverdi 0, egenvektor $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

10.1d) Egenverdier 3, 3, 8,

egenvektorer $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

10.3a) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$