Innlevering 6' (frist 19 november)

Disse oppgavene ble ved en feil ikke inkludert i øving 5 eller 6, men er en viktig del av pensum. Vi har derfor bestemt at de kan substitueres for oppgaver i øving 6, slik at dere ikke får flere obligatoriske oppgaver, men derimot valget mellom oppgavene i øving 6 og disse. Til sammen skal innleveringen deres ha omtrent like mange oppgaver som i den originale øving 6, men noen av dem kan være byttet ut med oppgaver fra dette settet, 6' (det holder altså ikke å kun levere inn oppgavene fra 6', siden det er færre her).

Oppgaver til kapittel 11

1. Finn matrisenes egenverdier og egenvektorer, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. Finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

3. La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

4. La $a \neq b$ være to reelle tall, begge ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar, og finn egenverdier og egenvektorer.

5. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x).$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

6. Lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Hva er rotasjonsvinkelen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.

c) Egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hvilken matrise representerer T med hensyn til denne basisen?

Tallsvar

11.1a) Egenverdier 2 og -4,
egenrom $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\right\}$

11.1b) Egenverdier $0, 3, i, -i$, egenrom $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,
$\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}39\\113\\30\\40\end{bmatrix}\right\}$, $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

11.2) $P = \begin{bmatrix} -1+i & -1+i \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

11.5a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11.5b) Egenverdier $1, 2, 3$,
egenrom $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$