# Innlevering 6 (frist 19. november)

## Oppgaver til kapittel 12

**1.** Bruk minste kvadraters metode på det overbestemte systemet

**a)** $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

**2.** Vi skal finne polynomer som passer til punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}.$$

**a)** Det finnes et unikt fjerdegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet, og finn koeffisientene.

**b)** Det finnes ingen andregradspolynomer som går gjennom alle punktene. Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til det annengradspolynomet som passer best.

**3.** Finn likevektsvektorene til de stokastiske matrisene:

**a)** $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

**4.** Vis at en regulær stokastisk $2 \times 2$-matrise

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \text{ med } 0 < a, b < 1$$

har en unik likevektsvektor.

## Oppgaver til kapittel 13

**1.** Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

**a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

**c)** $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**d)** $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

**2.** Finn en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og bestem generell løsning når

**a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

**3.** Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

**a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**4.** Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

**5.** Vi ser på det inhomogene systemet

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

**a)** Finn en basis for løsningsrommet til den tilhørende homogene ligningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

**b)** Sjekk om $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$ eller $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning for systemet.

**c)** Finn en generell løsning for systemet.

## Oppgaver til kapittel 14

**1.** Skriv om følgende andre ordens differensialligninger til systemer av første ordens differensialligninger

**a)** $y'' - y = 0$

**b)** $y'' + 2y' + 3y = 0$

**c)** $y'' + y' = 0$

**2.** Finn generell løsning av

**a)** $y'' - y' - 2y = 0$

**b)** $y'' + y = 0$

**c)** $y'' - 4y' + 4y = 0$

**3.** Løs initialverdiproblemet

**a)** $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

**b)** $y'' + y = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

**c)** $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(0) = -e^{-2}$

## Tallsvar

12.1a) $\begin{bmatrix} 5/38 \\ -11/19 \end{bmatrix}$

12.1b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

12.2a) $p(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{17}{12}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$

12.2b) $p(x) = \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{14}x + \frac{36}{35}$

12.3a) $\begin{bmatrix} 5/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}$

12.3b) $\begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

13.2a) $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix} e^{5t}.$

13.2b) $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}.$

13.3a) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}.$

13.3b) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}.$

13.5a) $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$

13.5c) $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$

14.2a) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$

14.2b) $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$

14.2c) $y(t) = (c_1 + tc_2)e^{2t}.$

14.3a) $y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}).$

14.3b) $y(t) = \sin(t).$

14.3c) $y(t) = (t-1)e^{2(t-1)}.$