Øvingsforelesning - Lineære ligningssystemer og gausseliminasjon H21
Løsningsforslag

Veldig korte oppgaver (quiz)

1. Hvor mange radoperasjoner har vi?
   Løsning: Vi har tre radoperasjoner: gange alle tallene i rad med en konstant ulik 0, bytte rekkefølge på radene, og legge et multiplum av én rad til en annen rad.

2. Sant eller usant: Alle lineære ligningssystemer har minst én løsning.
   Løsning: Dette er usant. Et enkelt eksempel på et ligningssystem som ikke har noen løsning er

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

   Dette har ingen løsning fordi $x+y$ kan ikke være lik både 1 og 2 samtidig. Tenk to parallelle linjer i planet som ikke ligger oppå hverandre. Disse vil aldri ha noen felles skjæringspunkter.

3. Sant eller usant: Det finnes lineære ligningssystemer med nøyaktig to løsninger.
   Løsning: Dette er usant. Et lineært ligningssystem har enten ingen, nøyaktig én eller uendelig mange løsninger. Dette er ganske enkelt å se for seg med to linjer i xy-planet (to ligninger med to ukjente). Siden vi jobber med rette linjer (lineære ligningsystemer), så kan ikke linjene ha nøyaktig to skjæringspunkter.

4. Hvis totalmatrisen til et system har denne trappeformen, hvor mange løsninger har systemet?

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   Løsning: Nederste rad kan "oversettes" til

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1,$$

   eller $0 = 1$. Dette stemmer ikke, så systemet har ingen løsning.

5. Hvis totalmatrisen til et system har denne trappeformen, hvor mange frie variable har løsningsmengden?

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

   Løsning: Denne matrisen representerer et ligningssystem med tre ligninger og fem ukjente. La oss kalle dem $x_1, \ldots, x_5$. Vi har pivotelement i kolonne 1, 3 og 5, og kan dermed velge x_2 og x_4 som frie variable. Det er altså to frie variable.

6. Hvor mange løsninger har systemet med denne totalmatrisen?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Løsning: Det kommer an på a. Hvis $a = 0$ har vi to frie variable og uendelig mange løsninger. Hvis $a \neq 0$ sier rad to at null er lik noe som ikke er null, og vi har ingen løsning.

Korte oppgaver

1. Finn alle løsninger til systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

   Løsning: Vi setter opp totalmatrisen til ligningssystemet og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \overset{R2 \leftarrow R2 - R1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right] \overset{R2 \leftarrow (-\frac{1}{2}) \cdot R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 7/2 \end{array}\right] \overset{R1 \leftarrow R1 - R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 7/2 \end{array}\right]$$

   Siden tredje kolonne ikke har noe pivot-element, kan vi velge z som fri variabel, og vi lar $z = t$ for $t \in \mathbb{R}$. Den siste matrisen representerer ligningene

$$x + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}$$
$$y - \frac{1}{2}z = \frac{7}{2}$$

   Setter vi inn $z = t$ og løser for x og y får vi løsningene

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, \quad y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}t, \quad z = t.$$

2. Finn alle løsninger til systemet

$$(1+i)x - y = i$$
$$(1-i)x + (1+i)y = 1$$

Løsning: Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer. Hold tunga rett i munnen og husk at $i^2 = -1$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & 1 \\ 1-i & -(1+i) & i \end{array}\right] \overset{R1 \leftarrow \frac{1}{1+i}R1}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 1-i & -(1+i) & i \end{array}\right] \overset{R2 \leftarrow R2-(1-i)R1}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & -1 & 2i \end{array}\right] \overset{R2 \leftarrow (-1)R2}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & -2i \end{array}\right] \overset{R1 \leftarrow R1-\frac{1-i}{2}R2}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3+i}{2} \\ 0 & 1 & -2i \end{array}\right]$$

Løsningen er altså

$$x = \frac{3+i}{2} \qquad y = -2i.$$

Lengre oppgaver

1. (**Eksamen høst 2018, oppgave 4**)
Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$.
Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene.
Løsning: De tre punktene forteller oss at vi må ha

$$p(0) = c = -1$$
$$p(1) = a + b + c = 1$$
$$p(2) = 4a + 2b + c = 7$$

Dette er et ligningssett med tre ligninger og tre ukjente (a, b og c), og det kan vi løse på vanlig måte med Gausseliminasjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Vi ser av den radreduserte matrisen at

$$a = 2, \qquad b = 0, \qquad c = -1.$$

Polynomet vi er ute etter er altså

$$p(x) = 2x^2 - 1.$$

2.(Eksamen vår 2021, oppgave 6 (omtrent))

For hvilke reelle verdier av a har ligningssystemet

$$x + z = 0$$
$$2x + y + 4z = 3$$
$$-x + (a^2 - 2)z = a - 1$$

ingen løsning? nøyaktig én løsning? uendelig mange løsninger?
Løsning: Vi setter først opp totalmatrisen og radreduserer.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & a^2-2 & a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

Nå må vi være litt forsiktige, for det kan hende at $a^2 - 1 = 0$. Dette skjer når $a = \pm 1$, så vi ser på disse tilfellene hver for seg.
Hvis $a = 1$ ser matrisen slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her kan vi velge z til å være en fri variabel og vi har uendelig mange løsninger.
Hvis $a = -1$ ser matrisen slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Da sier tredje rad at $0 = -2$, og dette er ikke sant. Dermed har systemet ingen løsning hvis $a = -1$.
Dersom $a \neq \pm 1$ (og dermed $a^2 - 1 \neq 0$) kan vi trygt gange tredje rad med $\frac{1}{a^2-1}$. Da får vi et pivotelement i hver kolonne og dermed nøyaktig én løsning (for hver verdi av $a \neq \pm 1$).

3. Løs systemet med følgende totalmatrise, for alle forskjellige (reelle) verdier av a og b:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \end{array}\right]$$

Løsning: Vi starter med å radredusere matrisen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-2 \end{array}\right]$$

Nå avhenger veien videre av verdien av $a - 1$. Vi ser først på hva som skjer dersom $a - 1 \neq 0$. Da kan vi gange tredje rad med $\frac{1}{a-1}$, og vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2}{a-1} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - \frac{b-2}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b-2}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2}{a-1} \end{array}\right]$$

Dersom $a - 1 \neq 0$ har vi altså alltid en entydig løsning

$$x = 2 - \frac{b-2}{a-1} \qquad y = -\frac{b-2}{a-1} \qquad z = \frac{b-2}{a-1}$$

Nå ser vi på hva som skjer dersom $a - 1 = 0$. Da har vi to muligheter videre. Enten er $b - 2 = 0$ eller så er $b - 2 \neq 0$. Dersom $b - 2 \neq 0$ får vi en ulovlig rad i matrisen, og vi får dermed ingen løsning. Dersom $b - 2 = 0$ ser matrisen slik ut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her kan vi velge z som en fri variabel. Vi setter $z = t, t \in \mathbb{R}$, og får løsningen

$$x = 2 - t \qquad y = -t \qquad z = t.$$