Øvingsforelesning 3 - Vektorligninger og matriser LF

Oppvarmingsoppgaver

1. Sant eller usant?
Vektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ligger i spennet til vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Løsning: Sant, siden $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. Regn ut: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.
Løsning: Matrisene har ulik dimensjon, så dette kan vi ikke regne ut.

3. Regn ut: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Løsning:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. Sant eller usant?
For alle kvadratiske matriser A og B har vi at $AB = BA$.
Løsning: Usant. Et moteksempel er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vil

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Sant eller usant?
La A og B være $n \times n$-matriser. Dersom det finnes en $n \times n$-matrise C slik at $CA = CB$, så må $A = B$.
Løsning: Usant. Det er fristende å gange med C^{-1} på begge sider av ligningen, men det er ikke sikkert C har en invers. Hvis C for eksempel er nullmatrisen, vil både CA og CB bli lik nullmatrisen, uavhengig av hva A og B er.

Korte oppgaver

1. Avgjør om følgende matriser er inverterbare og finn eventuelt inversmatrisen.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
Løsning: Vi prøver å finne inversmatrisen ved gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R2 \leftarrow R2 + R1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R2 \leftarrow \frac{1}{5} \cdot R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R1 \leftarrow R1 - 2 \cdot R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & | & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Matrisen er altså inverterbar, og inversen er

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
Løsning: Vi prøver igjen å finne inversmatrisen ved gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ -2 & -4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R2 \leftarrow R2 + 2 \cdot R1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser nå at matrisen til venstre for streken ikke er radekvivalent med identitetsmatrisen. Men hva betyr det? La oss minne oss selv på hva som egentlig foregår her. Når vi skal finne inversmatrisen til en matrise A ønsker vi å finne en matrise X slik at $AX = I$. La oss holde oss til 2×2-matriser siden det er det oppgaven handler om. La nå

$$X = [\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2] \text{ og } I = [\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2].$$

Da kan vi skrive om ligningen $AX = I$ til

$$[A\mathbf{x}_1 \ \ A\mathbf{x}_2] = [\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2].$$

Med andre ord ønsker vi å løse de to ligningssystemene

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \text{ og } A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2.$$

Vi løser begge to samtidig så vi slipper å radredusere A flere ganger enn nødvendig. Det vil si at rad 2 i matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

egentlig forteller oss at $0 = 2$ og $0 = 1$. Men dette stemmer ikke, så ligningssystemene våre har ingen løsning, som betyr at matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

ikke har noen invers.

2. Finn en matrise A slik at $A^2 = 0$, men $A \neq 0$, der 0 er nullmatrisen.
Løsning: Vi prøver å tenke så enkelt som mulig og forsøker å finne en 2×2-matrise. Vi kan ikke bruke nullmatrisen, men vi prøver med en matrise som har så mange nuller som mulig. For eksempel matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denne funker fint.

3. Er matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ radekvivalent med $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$?
Hint: Er de to matrisene radekvivalente med identitetsmatrisen? Er de i så fall radekvivalente med hverandre? Husk at to matriser er radekvivalente hvis vi kan komme fra den ene til andre ved å bruke radoperasjoner.
Løsning: Vi kan gå fra første matrise til identitetsmatrisen og tilbake igjen til første matrise ved å først trekke andre rad fra første rad, og så legge til andre rad igjen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan også gå fra andre matrise til identitetsmatrisen ved å legge første rad til andre rad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Men nå vet vi allerede hvordan vi kan gå fra identitetsmatrisen til den første matrisen, så vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De to matrisene er altså radekvivalente.

Lengre oppgaver

1. (Høst 2020, oppgave 8c) Gi et eksempel på en matrise A som oppfyller ligningen $A^2 + A + I = 0$, der I er 2×2 identitetsmatrisen og 0 betegner 2×2 nullmatrisen.
Løsning: Her er det mange løsninger, og mange måter å gå fram på. Vi viser bare én måte. La

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Hvis vi setter denne matrisen inn i ligningen over, får vi

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi legger sammen matrisene på venstresiden:

$$\begin{bmatrix} a^2 + a + bc + 1 & ab + bd + b \\ ca + dc + c & cb + d^2 + d + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi nå setter $b = c = 0$, så vil vi stå igjen med

$$\begin{bmatrix} a^2 + a + 1 & 0 \\ 0 & d^2 + d + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi må altså ha at $a^2 + a + 1 = 0$ og $d^2 + d + 1 = 0$, som gir (f.eks. ved abc-formelen)

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ og } d = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Med andre ord kan vi f.eks. sette

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}.$$

2. (Høst 2018, oppgave 5) La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn alle 2×2-matriser X som er løsninger av ligningen $AX = XA$.
Løsning: La

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Vi regner ut AX og XA:

$$AX = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_3 & 9x_2 - 3x_4 \\ -3x_1 + 2x_3 & -3x_2 + 2x_4 \end{bmatrix}$$
$$XA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_2 & -3x_1 + 2x_2 \\ 9x_3 - 3x_4 & -3x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Ligningen $AX = XA$ gir oss følgende ligninger:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_3 &= 9x_1 - 3x_2 \\ 9x_2 - 3x_4 &= -3x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_3 &= 9x_3 - 3x_4 \\ -3x_2 + 2x_4 &= -3x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

Hvis vi flytter alt over til venstresiden i hver ligning og forenkler får vi følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Dette løser vi på vanlig måte ved å gausseliminere totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi får to frie variabler, og den generelle løsningen blir

$$x_1 = -\frac{7}{3}s + t, \ x_2 = s, \ x_3 = s, \ x_4 = t,$$

der s og t er vilkårlige tall. Det betyr at alle løsninger av $AX = XA$ er gitt ved

$$X = \begin{bmatrix} -7/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t,$$

der s og t er vilkårlige tall.

3. (Vår 2019, oppgave 6, første del) La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$ og $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$.

Avgjør om $r(x)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.
Løsning: Vi følger hintet og setter inn for $p(x), q(x)$ og $r(x)$ i ligningen $r(x) = c_1 \cdot p(x) + c_2 \cdot q(x)$. Det gir

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9x + 3 &= c_1 \cdot (3x^2 - 3x - 6) + c_2 \cdot (x^2 - x - 8) \\
&= 3c_1x^2 - 3c_1x - 6c_1 + c_2x^2 - c_2x - 8c_2 \\
&= (3c_1 + c_2)x^2 + (-3c_1 - c_2)x + (-6c_1 - 8c_2).
\end{aligned}$$

Det gir følgende ligningssystem:

$$\begin{cases}
3c_1 + c_2 = 4 \\
-3c_1 - c_2 = -9 \\
-6c_1 - 8c_2 = 3
\end{cases}$$

Dette løser vi som vanlig ved å radredusere totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -9 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

Andre rad gir at $0 = -5$, som ikke kan stemme, så ligningssystemet har ingen løsning. Det betyr videre at vi ikke kan skrive $r(x)$ som en lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.