Øvingsforelesning 4 - Lineær uavhengighet og determinanter LF

Oppvarmingsoppgaver

1. Sant eller usant?
Mengden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uavhengig.

Løsning: Vi ser at $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Mengden er dermed *ikke* lineært uavhengig.

2. Er vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

lineært avhengige?
Løsning: Mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

inneholder nullvektoren, og er dermed lineært avhengig. Hvorfor er det slik? Vi ser på ligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

og ser at dersom vi setter $x_1 = x_3 = 0$, vil ligningen være oppfylt uansett hva x_2 er. Ligningen har altså uendelig mange løsninger, og dermed er vektorene pr. definisjon ikke lineært uavhengige.

3. Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Determinanten er gitt ved $4 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0$. Eventuelt kan man bruke at når en matrise har en kolonne eller rad med bare nuller, så er determinanten alltid null.

4. Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Løsning: Denne matrisen er øvre triangulær (bare nuller under diagonalen), og determinanten til en triangulærmatrise er produktet av elementene langs diagonalen. Her er determinanten altså 1.

5. Sant eller usant?
Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er inverterbar.
Løsning: Vi vet fra forrige oppgave at determinanten til matrisen er ulik null. Dermed er matrisen inverterbar.

6. Hvor mange løsninger har matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}?$$

Løsning: Dette systemet har nøyaktig én løsning. At en ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning, er f.eks. ekvivalent med at A har pivotelement i hver kolonne og at kolonnene i A er lineært uavhengige og at $\det A \neq 0$.

Korte oppgaver

1. Regn ut determinanten til følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi finner determinanten med kofaktoreks-pansjon langs første rad:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) &= 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right) - 1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - (1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. La $w \neq 1$ være en løsning av ligningen $z^3 = 1$. Regn ut determinanten til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}$$

og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.
Løsning: Det at w er en løsning av ligningen $z^3 = 1$ betyr egentlig bare at $w^3 = 1$. Med dette i bakhodet

finner vi determinanten ved kofaktorekspansjon langs første rad:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} w^2 & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix} - w \cdot \det \begin{bmatrix} w & 1 \\ w^2 & 1 \end{bmatrix} \\ &+ w^2 \cdot \det \begin{bmatrix} w & w^2 \\ w^2 & w \end{bmatrix} \\ &= (w^2 - w) - w(w - w^2) + w^2(w^2 - w^4) \\ &= w^2 - w - w^2 + w^3 + w^4 - w^6 \\ &= w^2 - w - w^2 + w^3 + (w^3 \cdot w) - (w^3)^2 \\ &= w^2 - w - w^2 + 1 + (1 \cdot w) - 1^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Determinanten er altså 0, og dermed er kolonnene lineært avhengige.

3. La A og B være $n\times n$-matriser. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke:
a) $\det(A + B) = \det A + \det B$
Løsning: La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da vil $\det A = 0$ og $\det B = 0$ og dermed $\det A + \det B = 0$. Men vi har også at

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så $\det(A + B) = 1 \neq \det A + \det B$.
La nå

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vil både A og B ha determinant lik 0, så $\det A + \det B = 0$ og i tillegg vil $\det(A + B) = 0$. Så påstanden er noen ganger sann, noen ganger usann.
b) $\det(AB) = \det(BA)$
Løsning: Dette er *alltid sant*. Vi bruker at

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

og får

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA).$$

Ved andre likhetstegn har vi brukt at determinanten til en matrise bare er et tall, og at vi dermed kan bytte rekkefølge på faktorene.

Lengre oppgaver

1. (Vår 2019, oppgave 3) Bruk definisjonen av lineær uavhengighet til å vise at vektorene

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært uavhengige.
Løsning: De to vektorene er lineært uavhengige dersom ligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

impliserer at $x = y = 0$. Nå kan vi f.eks. sette opp dette som et vanlig ligningssystem:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

Siste ligning gir $x = 0$, og hvis vi setter inn $x = 0$ i de andre ligningene så får vi at også $y = 0$. Dermed er $x = y = 0$ eneste løsning, og vektorene er lineært uavhengige.

2. (Høst 2018, oppgave 2) Se på følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Er vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?
Løsning: Vi kan besvare begge spørsmålene over på én gang, ved å gausseliminere totalmatrisen $[\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{b}\ ]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -9 \\ -6 & 4 & 8 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Vi ser nå at vi ikke får pivotelement i andre kolonne, og dermed er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært avhengige. Tredje rad sier også at $0 = -5$, som ikke går an, og dermed kan ikke $\mathbf{b}$ skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$.

3. (Høst 2020, oppgave 1) Vi ser på vektormengden $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, med

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Hvor mange elementer kan en lineært uavhengig delmengde av S maksimalt ha?
Løsning: Vi forsøker å bruke definisjonen av lineær uavhengighet til å sjekke om alle vektorene er lineært uavhengige og ser dermed på ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 11 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 12 & -1 & 17 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & -21 & 14 & 0 \\ 0 & 26 & -78 & 52 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi ser at vi får to frie variable og dermed uendelig mange løsninger. Vektorene er altså ikke lineært uavhengige. Dette gir mening siden vi har fire vektorer i $\mathbb{R}^3$ og da vil de aldri være lineært uavhengige. Hva skjer hvis vi prøver å fjerne f.eks. $\mathbf{v}_4$. Da får vi en matrise som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi har fortsatt en fri variabel og uendelig mange løsninger. Tar vi bort $\mathbf{v}_3$ også får vi en matrise med redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

hvor de to første radene forteller oss at $x_1 = x_2 = 0$. Dette er den eneste løsningen, og de to vektorene er lineært uavhengige. En lineært uavhengig delmengde av S kan altså inneholde maksimalt to elementer. Den reduserte trappeformen til matrisen som inneholder alle fire vektorene viser for øvrig hvordan vektorene kan skrives som lineærkombinasjoner av hverandre:

$$\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 \text{ og } \mathbf{v}_4 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2.$$

4. (Vår 2020, oppgave 4 og 5) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ der } a \in \mathbb{C}.$$

For hvilke verdier av a er A *ikke* inverterbar?
Løsning: Vi finner først determinanten til A med kofaktorekspansjon langs andre kolonne:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & -2 \end{bmatrix}\right) = -4 - 2a^2.$$

Vi vet at A ikke er inverterbar hvis og bare hvis $\det A = 0$, altså når $-4 - 2a^2 = 0$, som gir $a = \pm\sqrt{2}i$.