Øvingsforelesning 4 - Lineær uavhengighet og determinanter

Oppsummering

Lineær uavhengighet

- Husk: $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er alle lineærkombinasjoner på formen $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$
- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige hvis ligningen
$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
kun har løsning $x_1 = \cdots = x_n = 0$
- I motsatt tilfelle er vektorene lineært avhengige
- Kan sjekke lineær uavhengighet ved å løse ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$
- Kan også radredusere matrisen
$$A = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$$
- Lineær uavhengighet hvis vi får et pivotelement i hver kolonne
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre
- Altså hvis $\mathbf{v}_1 \notin \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$ (og tilsvarende for resten av vektorene)
- n vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele $\mathbb{R}^n$

Determinanter

- Determinanten til en matrise "bestemmer" om matrisen er inverterbar
- $\det A \neq 0$ hvis og bare hvis A er inverterbar
- Determinanten kan regnes ut på flere måter (kofaktorekspansjon, radoperasjoner)
- Radoperasjoner kan være lurt for å få en enklere kofaktorekspansjon eller en triangulærmatrise
- Determinanten til en triangulærmatrise er produktet av tallene langs diagonalen
- OBS! Radoperasjoner kan endre determinanten
- Et par nyttige regler:
$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \text{ og } \det A = \det A^T$$

Oppvarmingsoppgaver

1. Sant eller usant?
Mengden $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$ er lineært uavhengig.

2. Er vektorene
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$$
lineært avhengige?

3. Regn ut determinanten til matrisen
$$\begin{bmatrix}4 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}.$$

4. Hva er determinanten til matrisen
$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}?$$

5. Sant eller usant?
Matrisen
$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
er inverterbar.

6. Hvor mange løsninger har matriseligningen
$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}?$$

Korte oppgaver

1. Regn ut determinanten til følgende matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. La $w \neq 1$ være en løsning av ligningen $z^3 = 1$. Regn ut determinanten til

$$\begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}$$

og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.

3. La A og B være $n \times n$-matriser. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke:

a) $\det(A + B) = \det A + \det B$

b) $\det(AB) = \det(BA)$

Lengre oppgaver

1. (Vår 2019, oppgave 3) Bruk definisjonen av lineær uavhengighet til å vise at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

2. (Høst 2018, oppgave 2) Se på følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Er vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$?

3. (Høst 2020, oppgave 1) Vi ser på vektormengden $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, med

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Hvor mange elementer kan en lineært uavhengig delmengde av S maksimalt ha?

4. (Vår 2020, oppgave 4 og 5) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ der } a \in \mathbb{C}.$$

For hvilke verdier av a er A *ikke* inverterbar?