Øvingsforelesning 5 - Vektorrom LF

1. Her er fem vektorrom. For disse fem vektorrommene:

i) Hva er nullvektor?

ii) Gitt en vektor $\mathbf{x}$, hva er $-\mathbf{x}$?

iii) Finn en basis for vektorrommet.

iv) Finn en annen basis for vektorrommet.

1. Polynomer av grad ≤ 2, altså
$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

   i) Nullpolynomet $p(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ som er konstant lik 0 er slik at for at hvilket som helst annet polynom $q(x)$ er $q(x) + p(x) = q(x)$. Altså er det polynomet $p(x) \equiv 0$ som er konstant lik 0 som er nullvektoren i dette rommet.

   ii) For et polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ er $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$, fordi $p(x) + (-p(x))$ er konstant lik 0.

   iii) Et valg av basis er $\{1, x, x^2\}$. Vi ser at dette spenner ut hele rommet siden alle polynomer på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$ allerede er skrevet som en lineærkombinasjon av 1, x og x^2. For å vise at de er lineært uavhengige må vi finne for hvilke a_0, a_1, a_2 vi har at
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$$
   for alle $x \in \mathbb{R}$.
   Setter vi $x = 0$ får vi $a_0 = 0$. Videre hvis vi setter $x = 1$ får vi da $a_1 + a_2 = 0$, og til sist hvis vi setter $x = -1$ får vi $a_2 - a_1 = 0$. Den eneste løsningen for dette er $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Dette betyr at de er lineært uavhengige. Siden $\{1, x, x^2\}$ både spenner ut rommet og er lineært uavhengig danner det en basis.

   iv) Gitt en basis kan vi alltid legge til en multippel av en basisvektor til en annen, eller skalere en basisvektor med en ikke-null skalar for å få en ny basis. Et annet eksempel kan da være for eksempel $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

2. Øvre triangulære 2×2-matriser, altså
$$\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

   i) Nullmatrisen $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oppfyller $M + N = M$ for en alle øvre triangulære matriser M. Den er altså nullvektoren i dette rommet.

   ii) Gitt en matrise $M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ er den additive inversen $-M = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}$ fordi $M + (-M) = N$.

   iii) Et mulig valg av basis er
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
   Vi ser at for en hvilken som helst øvre triangulær matrise har vi
$$M := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   så $\mathcal{B}$ spenner ut rommet. Vi ser også at den eneste måten M kan være nullmatrisen er hvis $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, så $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig, og danner derfor en basis.

   iv) En annen basis kan for eksempel være
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Det lineære spennet
$$\text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

   i) Nullvektoren er bare den vanlige nullvektoren i $\mathbb{R}^4$,
$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   ii) Additive inverser er bare de samme som i $\mathbb{R}^4$,
$$-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix}.$$

   iii) En basis for rommet kan være
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
   Disse spenner per definisjon ut rommet, så vi trenger kun å sjekke at de er lineært uavhengige. Dette kan gjøres ved radreduksjon.

iv) En annen basis kan for eksempel være

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ på formen

$$f(x) = a \sin x + bx^2 + ce^x,$$

der a, b, c er i $\mathbb{R}$.

i) Funksjonen $h(x) = 0 \cdot \sin x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot e^x$ som er konstant lik 0 er slik at $f(x)+h(x) = f(x)$ for alle funksjoner f. Dette blir altså nullvektoren i rommet.

ii) Gitt en funksjon $f(x) = a \sin x + bx^2 + ce^x$ så vil den additive inversen være $-f(x) = -a \sin x - bx^2 - ce^x$, siden $f(x) + (-f(x))$ er konstant lik 0.

iii) En mulig basis er $\mathcal{B} = \{\sin x, x^2, e^x\}$. Per definisjon kan alle funksjonene i rommet vårt skrives som en lineærkombinasjon av disse, så vi trenger kun å vise at de er lineært uavhengige. Altså må vi finne for hvilke a, b og c vi har at

$$a \sin x + bx^2 + ce^x = 0$$

holder for alle $x \in \mathbb{R}$.

Plugger vi inn $x = 0$ får vi $c = 0$. Videre hvis vi plugger inn $x = \pi$ får vi $b\pi^2 = 0$ som medfører $b = 0$. Til slutt hvis vi ser på $x = \frac{\pi}{2}$ får vi $a = 0$, som viser at den eneste løsningen er $a = b = c = 0$, så mengden er lineært uavhengig. Altså er $\mathcal{B}$ en basis.

iv) En annen basis kan for eksempel være

$$\{\sin x, \sin x + x^2, \sin x + x^2 + e^x\}.$$

5. Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i) Nullvektoren er bare den vanlige nullvektoren i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Additive inverser er bare de samme som i $\mathbb{R}^3$,

$$-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

iii) En basis for rommet kan være

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi kan lett sjekke at disse to er lineært uavhengig, så det gjenstår bare å vise at de spenner hele rommet. Per definisjon kan en hver vektor i rommet skrives som en lineærkombinasjon

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at dette er det samme som

$$\begin{aligned} a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = (a+b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (a+c) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Altså kan alle vektorene skrives som en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Så de danner en basis.

iv) En annen basis kan for eksempel være

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Avgjør om følgende mengder er underrom.

a) Er

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = y \right\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Løsning:

For at noe skal være et underrom må det inneholde nullvektor og være lukket under addisjon og skalarmultipikasjon. Vi ser at mengden inneholder nullvektor. For å vise at den er lukket under addisjon ser vi på to vektorer i mengden $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$. Summen deres er

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er i mengden vet vi at $x_1 = y_1$ og at $x_2 = y_2$. Da følger det at $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, og dermed er $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ også i mengden, så den er lukket under addisjon.

For skalarmultiplikasjon la $\mathbf{x}_1$ være en vektor i mengden og la $\alpha \in \mathbb{R}$ være en skalar. Da er

$$\alpha \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix}.$$

Siden $x_1 = y_1$ har vi at $\alpha x_1 = \alpha y_1$, og dermed er $\alpha \mathbf{x}_1$ også i mengden. Så den er lukket under skalarmultiplikasjon.

Siden mengden oppfyller de tre kravene er den et underrom.

b) Er

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid |x| = |y| \right\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Løsning:

Denne mengden inneholder nullvektor og er lukket under skalarmultiplikasjon, men den er ikke lukket under addisjon. Dette er fordi både

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er i mengden, men summen deres

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er ikke i mengden. Den er derfor ikke et underrom.

c) Er

$$\{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p'(x) = 0\}$$

et underrom av $\mathcal{P}_2$?

Løsning:

Nullpolynomet $p(x) = 0$ oppfyller $p'(x) = 0$, så det er inneholdt i mengden.

Hvis to polynomer $p(x)$ og $q(x)$ oppfyller $p'(x) = 0$ og $q'(x) = 0$ så vil $(p+q)'(x) = p'(x)+q'(x) = 0$. Altså er mengden lukket under addisjon.

For et polynom $p(x)$ med $p'(x) = 0$ og en skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ så har vi at $(\alpha p(x))' = \alpha(p'(x)) = 0$. Med andre ord er mengden lukket under skalarmultiplikasjon.

Siden mengden oppfyller alle de tre kravene danner den et underrom.

3. Finn en basis for nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

Hvis vi radreduserer matrisen A får vi

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her ser vi at vi har en kolonne uten pivotelement. Dette betyr at vi får en fri variabel og følgelig er nullrommet 1-dimensjonalt. For å få en basis kan vi da sette den frie variabel z lik 1, og regne ut verdien for x og y. Da får vi

$$x - z = 0 \implies x = 1,$$

og

$$y + z = 0 \implies y = -1.$$

Så en basis for nullrommet er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Finn en basis for kolonnerommet til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

Hvis vi radreduserer matrisen får vi

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden vi får pivotelement i første og tredje kolonne, betyr det at første og tredje kolonne i B danner en basis for kolonnerommet. Med andre ord er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

en basis for kolonnerommet til B.