0.1 Oppsummering

- Husk at **vektorrom** er *noe* med addisjon (+) og skalarmultiplikasjon som oppfyller vektorromsakiomene
- En *lineærtransformasjon* er en funksjon $T\colon V \to W$ mellom vektorrom som oppfyller $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ og $T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$
- La $\mathcal{P}$ være vektorrommet av alle polynomer med reelle koeffisienter. Da er $T\colon P \to P$ gitt ved $T(p(x)) = p'(x)$ en lineærtransformasjon.
- La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon, da definerer vi:
  - $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
  - $\operatorname{Im} T = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$
- Hvis A er $m \times n$ matrise (med reelle tall) så er $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, gitt ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en lineærtransformasjon.
  - Og da er $\operatorname{Ker} T_A = \operatorname{Null} A$ og $\operatorname{Im} T_A = \operatorname{Col} A$.
  - Videre er T_A en isomorfi (det betyr: den er både injektiv og surjektiv) hvis og bare hvis A er inverterbar (spesielt må da $m = n$).
- Lineærtransformasjoner mellom endelig-dimensjonale vektorrom kan beskrives ved hjelp av matriser som kalles standardmatriser og avhenger av valg av basis.

0.2 Quiz

- $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon. Da holder $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u} + bT(\mathbf{v})$
- $T\colon V \to W$ er en lineærtransformasjon. Da er $\operatorname{Ker} T$: -underrom av V -underrom av W
- A en $m \times n$-matrise. Da er: $\operatorname{Ker} T_A =$ -$\operatorname{Null} A$ -$\operatorname{Col} A$ -$\operatorname{Row} A$
- La $\mathcal{P}_2$ være polynomer av grad ≤ 2, og la $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(p(x)) = p'(x)$. Da er $\operatorname{Ker} T =$
- La $\mathcal{P}_2$ være polynomer av grad ≤ 2, og la $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(p(x)) = p'(x)$. Da er $\operatorname{Im} T =$
- La $\mathcal{P}_2$ være polynomer av grad ≤ 2. Er $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ gitt ved $T(p(x)) = p'(x) + 1$ en lineærtransformasjon.

0.3 Kortoppgaver

Oppgave 1: Hvilke av V_1, V_2, V_3 er underrom:

1.
$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

2.
$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = yz \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

3.
$$V_3 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid p(1) = 0\} \subseteq \mathcal{P}_2.$$

Oppgave 2: Hvilke av funksjonene er lineær-transformasjoner:

1. La $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved
$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix}.$$

2. La $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved
$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(y+1) \end{bmatrix}.$$

3. La $T_3 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være gitt ved $T_3(p(x)) = x \cdot p'(x)$.

0.4 Langoppgaver

Oppgave 1: La $\mathcal{M}$ være vektorrommet av alle 2×2-matriser over $\mathbb{R}$. La $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ være gitt ved $T(M) = M - M^\top$.

(a) Vis at T er en lineærtransformasjon.

(b) Finn en basis for $\operatorname{Ker} T$?

(c) Finn en basis for $\operatorname{Im} T$?

Oppgave 2: La $U\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^4$ være gitt ved $U(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$

(a) Vis at U er en lineærtransformasjon.

(b) Finn en basis for$\operatorname{Ker} U$?

(c) Velg standard-basis for $\mathbb{R}^4$ og basisen

$$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

for $\mathcal{M}$. Hva er standardmatrisa for U med hensyn på disse basisene?

Oppgave 3:

Anbefalt øving 6: Oppgave 4

La $B = (\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix})$ og $C = (\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix})$ være basiser for $\mathbb{R}^2$. Finn matrisene A og B, slik at og for alle x i $\mathbb{R}^2$.