Løsningsforslag for TMA4115 Øvingsforelesning 6

October 3, 2021

1 Kortoppgaver

Oppgave 1, punkt 1: La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

I nullvektoren vil $x = y = 0$, som ikke tilfredsstiller kravet om at $x \neq y$. Dermed er ikke nullvektoren med i V, og V er dermed ikke et vektorrom.

Oppgave 1, punkt 2: La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = yz \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Vi ser at for eksempel vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er med i mengden V, fordi $1 = 1 \cdot 1$. Men

$$2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ikke med, fordi $2 \neq 2 \cdot 2$. Mengden er altså ikke lukket under skalarmultiplikasjon og er dermed ikke et vektorrom.

Oppgave 1, punkt 3: La $V = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid p(1) = 0\} \subseteq \mathcal{P}_2$.

1. Nullvektoren i $\mathcal{P}_2$ er polynomet som er konstant lik 0. Hvis $p(x) = 0$, så vil $p(1) = 0$. Så nullvektoren ligger i mengden V.

2. La $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ og $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ være to polynomer som ligger i mengden V. Da vil $p_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 = 0$ og $p_2(1) = a_2 + b_2 + c_2 = 0$. La nå $q(x) = p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$. Da vil $q(1) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0$. Så V er lukket under addisjon.

3. La $p(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynom som ligger i V. La $q(x) = k \cdot p(x)$ for en skalar k. Da har vi at $q(1) = k \cdot p(1) = k \cdot (a + b + c) = k \cdot 0 = 0$. Så V er lukket under skalarmultiplikasjon.

Alle de tre punktene er tilfredsstilt, så V er et underrom av $\mathcal{P}_2$ og dermed et vektorrom.

Oppgave 2, punkt 1: La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

og at

$$T\left(k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky + kz \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix} = k \cdot T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right).$$

Begge kravene er oppfylt, og T er dermed en lineærtransformasjon.

Oppgave 2, punkt 2: La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(y+1) \end{bmatrix}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ (x_1 + x_2)(y_1 + y_2 + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1y_1 + x_1y_2 + x_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

men

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1y_1 + x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2y_2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1y_1 + x_1 + x_2y_2 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er ikke addisjon bevart, og T er *ikke* en lineærtransformasjon.

1.1

La $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ være gitt ved $T(p(x)) = x \cdot p'(x)$. Vi ser at

$$T(p_1(x)+p_2(x)) = x\cdot(p_1(x)+p_2(x))' = x\cdot p_1'(x)+x\cdot p_2'(x) = T(p_1(x))+T(p_2(x)),$$

og at

$$T(k \cdot p(x)) = x \cdot (kp(x))' = k \cdot (x \cdot p'(x)) = k \cdot T(p(x)).$$

Begge kravene er oppfylt, og T er dermed en lineærtransformasjon.

2 Langoppgaver

Oppgave 1:

(a) La X, Y være matriser. Da er $T(X+Y) = (X+Y)-(X+Y)^\top = X+Y-X^\top-Y^\top = T(X)+T(Y)$ som ønsket. La nå k være en skalar. Da får vi $T(kX) = (kX)-(kX)^\top = k(X-X^\top) = kT(X)$, som ønsket.

(b) Merk at $T(X) = 0$ hvis og bare hvis $X^\top = X$. Vi leter derfor etter en basis for alle *symmetriske* matriser. En symmetrisk 2×2 matrise må ha formen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, så de tre matrisene

$$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$$

danner en basis for kjernen til T, da disse er lineært uavhengig og alle symmetriske 2×2-matriser kan skrives som en lineær kombinasjon av dem.

(c) Hvis $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er $T(M) = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}$. Siden $b-c = -(c-b)$, er $\operatorname{Im} T$ alle matriser på formen $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ for $x \in \mathbb{R}$, så

$$(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$$

danner en basis for $\operatorname{Im} T$.

Oppgave 2:

(a) La $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og $Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Da er $U(X+Y) = U(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a+e \\ 0 \\ 0 \\ b+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} = U(X)+U(Y)$, som ønsket. La nå k være en skalar. Da er $U(kX) = U(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ke \\ 0 \\ 0 \\ kf \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} = kU(X)$.

(b) La $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ være slik at $U(X) = 0$. Da må $a = b = 0$, og c, d kan velges fritt. Vi får altså at for eksempel $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ danner en basis for kjernen $\operatorname{Ker} U$.

(c) Vi beregner matrisen kolonnevis, ved å regne ut $U(X)$ for hver matrise i basisen $(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$, som vil danne kolonnene i matrisen.

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3: For å regne ut kolonnene i matrisen A, må vi utrykke vektorene i $\mathscr{B}$ som lineærkombinasjoner av vektorene i $\mathscr{C}$.

$$A = [[B_1]_{\mathscr{C}} \mid [B_2]_{\mathscr{C}}] = [\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}} \mid \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}}]$$

Vi finner så $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}}$ ved å løse ligningsystemet $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vi får løsningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 13/24 \\ 7/24 \end{bmatrix}$. På samme måte regner vi ut $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}}$ ved å løse ligningsettet $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og får $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7/24 \\ 13/24 \end{bmatrix}$. Disse to løsningene danner kolonnene i A, og vi får

$$A = [\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}} \mid \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathscr{C}}] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Vi kan gjøre tilsvarende utregninger for å finne B, men vi kan utnytte at vi allerede kjenner A for å finne B. Man kan nemlig vise at inversen til en basis-skifte matrise vil være basis-skifte matrisen som går omvendt vei. I dette tilfellet vil derfor A^{-1} gi oss basis-skifte matrisen fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$. Vi kan altså finne B direkte ved å regne ut A^{-1}, for eksempel på en matrisekalkulator. Vi får at

$$B = A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$$

.