PROJEKSJONER , DEL I

1. Repetisjon

- Underrommene til $\mathbb{R}^3$, er
  - Linjer gjennom origo: $V = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v_1}\}$, der $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$.
  - Plan gjennom origo: $V = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, der $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er lineært uavhengige.
  - I tillegg: hele $\mathbb{R}^3$ eller 0-rommet.
- La V være et underrom. Det ortogonale projeksjonen av en vektor $\mathbf{x}$ i V, kalles $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x}$, og er det punktet i V som er nærmest $\mathbf{x}$, altså vektoren $\mathbf{v}$ i V slik at $||\mathbf{x} - \mathbf{v}||$ er minst mulig,
- Husk $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.
- Hvis $V = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v_1}\}$, så er

$$\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_1}}{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1}}\right)\mathbf{v_1}$$

- Husk at to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$.
- Mer generelt, vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_1}||\ ||\mathbf{v_2}||}$$

- Hvis $V = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ og $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er ortogonale, så er

$$\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = (\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_1}}{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1}})\mathbf{v_1} + (\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_2}}{\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2}})\mathbf{v_2}$$

- For å kunne projisere ned i V, trenger vi å kunne finne en *ortogonal basis* for V. Gram-Schmidt-metoden konstruerer er ortogonal basis fra en vilkårlig basis.
  - Start med en basis $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$. Vil finne en ortogonal basis $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$.
  - La $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}$.
  - La $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \left(\frac{\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{u_1}}{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_1}}\right)\mathbf{u_1}$
  - La $\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \left(\frac{\mathbf{v_3} \cdot \mathbf{u_1}}{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_1}}\right)\mathbf{u_1} - \left(\frac{\mathbf{v_3} \cdot \mathbf{u_2}}{\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{u_2}}\right)\mathbf{u_2}$

2. Quiz

- Påstand: V underrom av $\mathbb{R}^3$, med dimension større enn 0, og mindre enn 3. Da må V være en linje gjennom origo, eller et plan gjennom origo.

  (Svar: Sant)

- V underrom av $\mathbb{R}^3$, og $\mathbf{x}$ vektor i $\mathbb{R}^3$. Når er $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$?

  (Svar: Når $\mathbf{x}$ er i V)

- V underrom av $\mathbb{R}^3$, og $\mathbf{x}$ vektor i $\mathbb{R}^3$. Når er $\text{proj}_V\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$?

  (Svar: Når $\mathbf{x}$ er ortogonal på V)

- Påstand: $(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

  (Svar: Sant)

- Påstand: $(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$.

  (Svar: Usant)

- Påstand: $(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix})$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$.

  (Svar: Sant)

- Påstand: $(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix})$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

  (Svar: Usant)

3. Korte oppgaver

- La $V = \text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\}$. Finn $\text{proj}_V\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\}$

  (Svar: $\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$)

- $V = \text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\}$. Finn $\text{proj}_V\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\}$.

  (Svar: $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$)

- Finn en ortogonal basis for $\text{Sp}\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\}$

  (Svar: $(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix})$)

4. Eksamensoppgaver

- Desember 17: oppgave 6 og 7
- August 16: oppgave 4
- Desember 15: oppgave 6

Løsningsforslag for alle disse ligger ute på wiki-sidene