Repetisjon

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_i b_i$$

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_i b_i$$

- Lengden til en vektor: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n} a_i b_i$$

- Lengden til en vektor: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.
- Vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_1}||\ ||\mathbf{v_2}||}$$

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_i b_i$$

- Lengden til en vektor: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.
- Vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_1}||\ ||\mathbf{v_2}||}$$

- Dermed: to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$.

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_i b_i$$

- Lengden til en vektor: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.
- Vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_1}||\;||\mathbf{v_2}||}$$

- Dermed: to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$.
- Avstanden mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er da $||\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}||$.

Repetisjon

- Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_i b_i$$

- Lengden til en vektor: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.
- Vinkelen θ mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_1}||\ ||\mathbf{v_2}||}$$

- Dermed: to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$.
- Avstanden mellom to vektorer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ er da $||\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}||$.

Repetisjon, forts.

Repetisjon, forts.

- En mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ kalles ortogonal dersom $\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{u_j} = 0$ når $i \neq j$.

Repetisjon, forts.

- En mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ kalles ortogonal dersom $\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{u_j} = 0$ når $i \neq j$.
- Husk: vi har sett metoder/formler for å
  - finne ortogonal basis for et rom (Gram-Schmidt)

Repetisjon, forts.

- En mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ kalles ortogonal dersom $\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{u_j} = 0$ når $i \neq j$.
- Husk: vi har sett metoder/formler for å
  - finne ortogonal basis for et rom (Gram-Schmidt)
  - projisere en vektor i et underrom, når vi har gitt en ortogonal basis for underrommet

Repetisjon, forts.

- En mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ kalles ortogonal dersom $\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{u_j} = 0$ når $i \neq j$.
- Husk: vi har sett metoder/formler for å
  - finne ortogonal basis for et rom (Gram-Schmidt)
  - projisere en vektor i et underrom, når vi har gitt en ortogonal basis for underrommet

Egenskaper ved skalarprodukt

Egenskaper ved skalarprodukt

- (Symmetri) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Egenskaper ved skalarprodukt

- (Symmetri) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (Positivitet) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = 0$

Egenskaper ved skalarprodukt

- (Symmetri) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (Positivitet) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = 0$
- (Lineæritet) $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$

Egenskaper ved skalarprodukt

- (Symmetri) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (Positivitet) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = 0$
- (Lineæritet) $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$
-
- Merk: Vi ser her bare på reelle vektorrom.

Egenskaper ved skalarprodukt

- (Symmetri) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (Positivitet) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = 0$
- (Lineæritet) $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$
-
- Merk: Vi ser her bare på reelle vektorrom.

Vektorrom av funksjoner

Vektorrom av funksjoner

- La $a < b$ være reelle tall, slik at $[a, b]$ er et intervall på tallinja.

Vektorrom av funksjoner

- La $a < b$ være reelle tall, slik at $[a, b]$ er et intervall på tallinja.
- Husk at $C[a, b]$, altså mengden av alle kontinuerlige funksjoner
$$[a, b] \to \mathbb{R},$$
er et vektorrom. Vi kan legge sammen funksjoner, og gange med en skalar, og disse to operasjonene oppfyller vektrorromsaksiomene.

Vektorrom av funksjoner

- La $a < b$ være reelle tall, slik at $[a, b]$ er et intervall på tallinja.
- Husk at $C[a, b]$, altså mengden av alle kontinuerlige funksjoner
$$[a, b] \to \mathbb{R},$$
er et vektorrom. Vi kan legge sammen funksjoner, og gange med en skalar, og disse to operasjonene oppfyller vektrorromsaksiomene.
- Vi ser ofte på intervallene $[0, 1]$ eller $[0, 2\pi]$.

Vektorrom av funksjoner

- La $a < b$ være reelle tall, slik at $[a, b]$ er et intervall på tallinja.
- Husk at $C[a, b]$, altså mengden av alle kontinuerlige funksjoner
$$[a, b] \to \mathbb{R},$$
er et vektorrom. Vi kan legge sammen funksjoner, og gange med en skalar, og disse to operasjonene oppfyller vektrorromsaksiomene.
- Vi ser ofte på intervallene $[0, 1]$ eller $[0, 2\pi]$.

Vektorrom av funksjoner

Vektorrom av funksjoner

- Eksempel på underrom (av f.eks $C[0,1]$):
  $\mathscr{P}_2$: Polynomer av grad ≤ 2. Vi kan tenke på dette rommet som $\mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$. Altså de tre funksjonene $f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2$ utgjør en basis for $\mathscr{P}_2$; de utspenner rommet, og de er lineært uavhengige.

Vektorrom av funksjoner

- Eksempel på underrom (av f.eks $C[0,1]$):
  $\mathscr{P}_2$: Polynomer av grad ≤ 2. Vi kan tenke på dette rommet som $\text{Sp}\{1, x, x^2\}$. Altså de tre funksjonene $f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2$ utgjør en basis for $\mathscr{P}_2$; de utspenner rommet, og de er lineært uavhengige.
- Et annet eksempel på underrom (av f.eks $C[0, 2\pi]$) er $\text{Sp}\{1, \sin(x), \cos(x)\}$.

Vektorrom av funksjoner

- Eksempel på underrom (av f.eks $C[0,1]$):
  $\mathscr{P}_2$: Polynomer av grad ≤ 2. Vi kan tenke på dette rommet som $\mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$. Altså de tre funksjonene $f_0 = 1,\ f_1 = x,\ f_2 = x^2$ utgjør en basis for $\mathscr{P}_2$; de utspenner rommet, og de er lineært uavhengige.
- Et annet eksempel på underrom (av f.eks $C[0,2\pi]$) er $\mathrm{Sp}\{1, \sin(x), \cos(x)\}$.

Projeksjoner i rom av funksjoner

Projeksjoner i rom av funksjoner

Vi ønsker å projisere også i vektorrom av funksjoner. F.eks. ønsker vi kanskje å finne andregradspolynomet $a_0 + a_1x + a_2x^2$ som er "nærmest mulig" funksjonen $h(x) = e^x$ på et intervall, f.eks. intervallet $[0, 1]$.

Projeksjoner i rom av funksjoner

Vi ønsker å projisere også i vektorrom av funksjoner. F.eks. ønsker vi kanskje å finne andregradspolynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som er "nærmest mulig" funksjonen $h(x) = e^x$ på et intervall, f.eks. intervallet $[0, 1]$.

For å gi "nærmest mulig" en mening i denne sammenheng, trenger vi en måte å måle avstand på i $C[0, 1]$.

Projeksjoner i rom av funksjoner

Vi ønsker å projisere også i vektorrom av funksjoner. F.eks. ønsker vi kanskje å finne andregradspolynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som er "nærmest mulig" funksjonen $h(x) = e^x$ på et intervall, f.eks. intervallet $[0, 1]$.

For å gi "nærmest mulig" en mening i denne sammenheng, trenger vi en måte å måle avstand på i $C[0, 1]$.

Vi ønsker å si at to funksjoner $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ er "nære", om arealet mellom grafene til f og g er lite; jo mindre dette arealet er, jo nærmere er de.

Projeksjoner i rom av funksjoner

Vi ønsker å projisere også i vektorrom av funksjoner. F.eks. ønsker vi kanskje å finne andregradspolynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som er "nærmest mulig" funksjonen $h(x) = e^x$ på et intervall, f.eks. intervallet $[0, 1]$.

For å gi "nærmest mulig" en mening i denne sammenheng, trenger vi en måte å måle avstand på i $C[0, 1]$.

Vi ønsker å si at to funksjoner $f, g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ er "nære", om arealet mellom grafene til f og g er lite; jo mindre dette arealet er, jo nærmere er de.

Projeksjoner i rom av funksjoner, forts.

Projeksjoner i rom av funksjoner, forts.

Vi innfører da det vi etterhvert vil kalle et ”indre-produkt” på $C[0,1]$, nemlig

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Projeksjoner i rom av funksjoner, forts.

Vi innfører da det vi etterhvert vil kalle et "indre-produkt" på $C[0,1]$, nemlig

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Hvis vi nå sier at "lengden" til en vektor h i $C[0,1]$ er

$$\sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\int_0^1 h(x)^2 dx},$$

ser vi at $\langle f - g, f - g \rangle$ blir en meningsfull måte å måle avstanden mellom f og g på intervallet $[0,1]$.

Projeksjoner i rom av funksjoner, forts.

Vi innfører da det vi etterhvert vil kalle et ”indre-produkt” på $C[0,1]$, nemlig

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Hvis vi nå sier at ”lengden” til en vektor h i $C[0,1]$ er

$$\sqrt{\langle h, h\rangle} = \sqrt{\int_0^1 h(x)^2 dx},$$

ser vi at $\langle f-g, f-g\rangle$ blir en meningsfull måte å måle avstanden mellom f og g på intervallet $[0,1]$.
Dette produktet er altså et tall, og vi får at de samme regneregler holder, som for prikkproduktet i $\mathbb{R}^n$.

Projeksjoner i rom av funksjoner, forts.

Vi innfører da det vi etterhvert vil kalle et ”indre-produkt” på $C[0,1]$, nemlig

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Hvis vi nå sier at ”lengden” til en vektor h i $C[0,1]$ er

$$\sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\int_0^1 h(x)^2 dx},$$

ser vi at $\langle f - g, f - g \rangle$ blir en meningsfull måte å måle avstanden mellom f og g på intervallet $[0,1]$.
Dette produktet er altså et tall, og vi får at de samme regneregler holder, som for prikkproduktet i $\mathbb{R}^n$.

Regneregler

Regneregler

- (Symmetri) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

Regneregler

- (Symmetri) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
- (Positivitet) $\langle f, f \rangle \geq 0$, og $\langle f, f \rangle = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$ (altså funksjonen som er konstant lik 0 på intervallet $[0, 1]$)

Regneregler

- (Symmetri) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
- (Positivitet) $\langle f, f\rangle \geq 0$, og $\langle f, f\rangle = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$ (altså funksjonen som er konstant lik 0 på intervallet $[0, 1]$)
- (Lineæritet) $\langle f, ag + bh\rangle = a\langle f, g\rangle + b\langle f, h\rangle$ for alle skalarer a, b og funksjoner f, g, h i $C[0, 1]$.

Regneregler

- (Symmetri) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
- (Positivitet) $\langle f, f \rangle \geq 0$, og $\langle f, f \rangle = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$ (altså funksjonen som er konstant lik 0 på intervallet $[0, 1]$)
- (Lineæritet) $\langle f, ag + bh \rangle = a\langle f, g \rangle + b\langle f, h \rangle$ for alle skalarer a, b og funksjoner f, g, h i $C[0, 1]$.

Indre-produkt

Indre-produkt

Vi bruker disse regnereglene som definisjon på indreprodukt i vilkårlig vektorrom. Et (reelt) indre-produkt er en funksjon som tar inn to vektorer, og produserer et reelt tall, altså en funksjon $V \times V \to \mathbb{R}$. Vi bruker notasjonen $\langle\ ,\ \rangle$ for indreprodukt.

Indre-produkt

Vi bruker disse regnereglene som definisjon på indreprodukt i vilkårlig vektorrom. Et (reelt) indre-produkt er en funksjon som tar inn to vektorer, og produserer et reelt tall, altså en funksjon $V \times V \to \mathbb{R}$. Vi bruker notasjonen $\langle\ ,\ \rangle$ for indreprodukt.

Altså: En reelt indreprodukt er en funksjon $\langle\ ,\ \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ som oppfyller reglene

Indre-produkt

Vi bruker disse regnereglene som definisjon på indreprodukt i vilkårlig vektorrom. Et (reelt) indre-produkt er en funksjon som tar inn to vektorer, og produserer et reelt tall, altså en funksjon $V \times V \to \mathbb{R}$. Vi bruker notasjonen $\langle\ ,\ \rangle$ for indreprodukt.

Altså: En reelt indreprodukt er en funksjon $\langle\ ,\ \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ som oppfyller reglene

Aksiomer for Indre-produkt

Aksiomer for Indre-produkt

- (Symmetri) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

Aksiomer for Indre-produkt

- (Symmetri) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- (Positivitet) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Aksiomer for Indre-produkt

- (Symmetri) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- (Positivitet) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (Lineæritet) $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + b\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ for alle skalarer a, b og vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V.

Aksiomer for Indre-produkt

- (Symmetri) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- (Positivitet) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (Lineæritet) $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + b\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ for alle skalarer a, b og vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V.

Vi sier at to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V er ortogonale, dersom $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, og at en mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ er ortogonal, dersom $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle = 0$ for alle $i \neq j$.

Aksiomer for Indre-produkt

- (Symmetri) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- (Positivitet) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (Lineæritet) $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + b\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ for alle skalarer a, b og vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i V.

Vi sier at to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V er ortogonale, dersom $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, og at en mengde vektorer $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ er ortogonal, dersom $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle = 0$ for alle $i \neq j$.

Projeksjoner

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

- La U være et underrom av V, og anta at U har en ortogonal basis $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Vi kan da finne projeksjonen $\text{proj}_U \mathbf{v}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i underrommet U ved formelen

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

- La U være et underrom av V, og anta at U har en ortogonal basis $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}\}$. Vi kan da finne projeksjonen $\text{proj}_U \mathbf{v}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i underrommet U ved formelen
- $$\text{proj}_U \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_1} \rangle}{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle}\mathbf{u_1} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_2} \rangle}{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle}\mathbf{u_2} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_n} \rangle}{\langle \mathbf{u_n}, \mathbf{u_n} \rangle}\mathbf{u_n}$$

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

- La U være et underrom av V, og anta at U har en ortogonal basis $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Vi kan da finne projeksjonen $\text{proj}_U \mathbf{v}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i underrommet U ved formelen
- $$\text{proj}_U \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_1} \rangle}{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle}\mathbf{u_1} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_2} \rangle}{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle}\mathbf{u_2} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_n} \rangle}{\langle \mathbf{u_n}, \mathbf{u_n} \rangle}\mathbf{u_n}$$
- Dette er den samme formelen som for projeksjon i $\mathbb{R}^n$, bortsett fra at prikkproduketet i $\mathbb{R}^n$ er byttet ut med et indre-produkt for V.

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

- La U være et underrom av V, og anta at U har en ortogonal basis $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Vi kan da finne projeksjonen $\mathrm{proj}_U \mathbf{v}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i underrommet U ved formelen
- $$\mathrm{proj}_U \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_1} \rangle}{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle}\mathbf{u_1} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_2} \rangle}{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle}\mathbf{u_2} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_n} \rangle}{\langle \mathbf{u_n}, \mathbf{u_n} \rangle}\mathbf{u_n}$$
- Dette er den samme formelen som for projeksjon i $\mathbb{R}^n$, bortsett fra at prikkproduketet i $\mathbb{R}^n$ er byttet ut med et indre-produkt for V.
- Gram-Schmidt metoden, for å finne ortogonal basis fungerer akkurat som i $\mathbb{R}^n$, vi trenger igjen bare å erstatte prikkproduktet med det aktuelle indre-produktet for V.

Projeksjoner

Vi får nå samme metoder/formler for projeksjoner, som for relle tall med prikkprodukt.

- La U være et underrom av V, og anta at U har en ortogonal basis $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Vi kan da finne projeksjonen $\text{proj}_U \mathbf{v}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i underrommet U ved formelen
- $$\text{proj}_U \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_1} \rangle}{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle} \mathbf{u_1} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_2} \rangle}{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle} \mathbf{u_2} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u_n} \rangle}{\langle \mathbf{u_n}, \mathbf{u_n} \rangle} \mathbf{u_n}$$
- Dette er den samme formelen som for projeksjon i $\mathbb{R}^n$, bortsett fra at prikkproduketet i $\mathbb{R}^n$ er byttet ut med et indre-produkt for V.
- Gram-Schmidt metoden, for å finne ortogonal basis fungerer akkurat som i $\mathbb{R}^n$, vi trenger igjen bare å erstatte prikkproduktet med det aktuelle indre-produktet for V.

Eksempel

Eksempel

- Se på underrommet $U = \mathscr{P}_1 = \mathrm{Sp}\{1, x\}$ av $C[0, 1]$, med indre-produktet som gitt over:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Eksempel

- Se på underrommet $U = \mathscr{P}_1 = \mathrm{Sp}\{1, x\}$ av $C[0, 1]$, med indre-produktet som gitt over:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

- Funksjonene $f_0 = 1$ og $f_1 = x$ utgjør en basis for U, men *ikke* en ortogonal basis, siden

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Eksempel

- Se på underrommet $U = \mathscr{P}_1 = \text{Sp}\{1, x\}$ av $C[0,1]$, med indre-produktet som gitt over:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

- Funksjonene $f_0 = 1$ og $f_1 = x$ utgjør en basis for U, men *ikke* en ortogonal basis, siden

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

- Derimot utgjør $g_0 = 1$ og $g_1 = x - \frac{1}{2}$ en ortogonal basis, siden

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \int_0^1 x - \frac{1}{2}\, dx = 0$$

Eksempel

- Se på underrommet $U = \mathscr{P}_1 = \mathrm{Sp}\{1, x\}$ av $C[0,1]$, med indre-produktet som gitt over:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

- Funksjonene $f_0 = 1$ og $f_1 = x$ utgjør en basis for U, men *ikke* en ortogonal basis, siden

$$\langle f_0, f_1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

- Derimot utgjør $g_0 = 1$ og $g_1 = x - \frac{1}{2}$ en ortogonal basis, siden

$$\langle f_0, f_1\rangle = \int_0^1 x - \frac{1}{2}\,dx = 0$$

Oppgaver

Oppgaver

I oppgavene skal vi se på hvordan vi kan finne en ortogonal basis for $\mathscr{P}_2$ (med samme indreprodukt), og hvordan vi kan bruke denne til å projisere en annen funksjon ned i $\mathscr{P}_2$, altså hvordan vi finner den beste approksimasjonen på et intervall.

Oppgaver

I oppgavene skal vi se på hvordan vi kan finne en ortogonal basis for $\mathscr{P}_2$ (med samme indreprodukt), og hvordan vi kan bruke denne til å projisere en annen funksjon ned i $\mathscr{P}_2$, altså hvordan vi finner den beste approksimasjonen på et intervall.

- Oppgave 1: Finn en ortogonal basis for $\mathscr{P}_2 = \mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$ med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

  ved hjelp av Gram-Schmidt metoden
- Oppgave 2: Finn projeksjonen av $h(x) = e^x$ i $\mathscr{P}_2$.

Oppgaver

I oppgavene skal vi se på hvordan vi kan finne en ortogonal basis for $\mathscr{P}_2$ (med samme indreprodukt), og hvordan vi kan bruke denne til å projisere en annen funksjon ned i $\mathscr{P}_2$, altså hvordan vi finner den beste approksimasjonen på et intervall.

- Oppgave 1: Finn en ortogonal basis for $\mathscr{P}_2 = \mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$ med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

  ved hjelp av Gram-Schmidt metoden
- Oppgave 2: Finn projeksjonen av $h(x) = e^x$ i $\mathscr{P}_2$.