1. Repitisjon

- λ er en egenverdi til en $n \times n$-matrise A, dersom det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{x}$, slik at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- Og en slik $\mathbf{x}$ kalles da en egenvektor, tilhørende λ.
- Hvis λ egenverdi: Egenrommet er da $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$.
- Merk: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \mathrm{Null}(A - \lambda I)$.
- Den karakteristiske ligningen er: $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Løs denne ligningen for å finne egenverdiene!
- For en lineærtransformasjon $T : V \to V$, er λ en egenverdi om det finnes ikke-nullvektor $\mathbf{v}$ i V, med $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
- Husk, multiplikasjon med en $n \times n$-matrise A, er en lineærtransformasjon $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Reelle matriser kan ha komplekse egenverdier!
- Egenvektorer som tilhører forskjellige egenverdier, er lineært uavhengige.
- En kvadratisk matrise har egenverdien 0 hvis og bare hvis den ikke er inverterbar.

2. Quiz

- Påstand: Det er bare kvadratiske matriser som kan ha egenverdier
  Svar: Sant
- Hva er egenverdiene til matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$?
  Svar: 2 og 3
- Hva er egenverdiene til matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
  Svar: i og -i
- Påstand: Det finnes kvadratiske matriser som ikke har egenverdier
  Svar: Usant
- Påstand: En reell 3×3-matrise, har alltid minst én reell egenverdi
  Svar: Sant

3. Korte oppgaver

Hva er egenverdiene til matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?

Svar: Den karakteristiske ligningen er $(1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - 4 = (1-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2)-4+2\lambda = 4-4\lambda+\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-\lambda^3-4+2\lambda = -\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$. Egenverdiene er altså: 0, 2, 3

Hvilken av disse vektorene er en egenvektor for matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$?

Alternativer: $[1 \ -1 \ 1]$ eller $[4 \ 5 \ -2]$ eller $[1 \ 1 \ 5]$

Svar: $[4\ 5\ \ -2]$ er riktig, siden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4. Eksamensoppgaver

- Høst 14, 4(a)-(d)
- Vår 18, oppgave 6 (b)
- August (kont) 14, 4 (a)

(Løsningsforslag på alle disse finnes på wiki-sidene)