Øvingsforelesning til 11 - Diagonalisering

Oppvarming og oppsummering

1. La A være en $n \times n$-matrise. En egenvektor for A er

- det samme som nullvektoren
- noe jeg tar medisin mot
- en veldig nyttig vektor for å forstå hvordan A virker på vektorer

Løsning: Egenvektorer er veldig nyttige for å forstå hvordan A virker på vektorer. Vi skal se i dag på hvordan egenvektorer hjelper oss til å forenkle matrisen mye. For dersom vi kan finne en basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A, så kan vi bytte koordinatene slik at A virker som en diagonalmatrise, som er en veldig enkel type matriser.

2. En diagonalmatrise er

- en matrise der alle elementene på diagonalen er lik 0
- en matrise der alle elementene er lik 1
- en $n \times n$-matrise der alle elementene som ikke står på diagonalen er lik 0

Løsning: En diagonalmatrise er en matrise der alle elementer som **ikke** står på diagonalen er lik 0, dvs den er på formen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

3. Diagonalisering er en metode som

- bare fokusserer på diagonalen i koordinatsystemet
- jeg nå hører om for første gang
- hjelper oss å forstå hvordan lineærtransformasjoner virker

Løsning: Diagonalisering er en metode som hjelper oss å forstå hvordan en lineærtransformasjon virker. Anta at $T\colon V \to V$ er en lineærtransformasjon, og at T er diagonaliserbar. Det betyr at det finnes det noen spesielle vektorer i V som T virker på en veldig enkel måte på. Det er egenvektorene til T. Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor til T med egenverdi λ så har vi $T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Dvs at langs $\mathbf{v}$ er det veldig enkelt å beregne hva T gjør. At T er diagonaliserbar, betyr at vi til og med kan finne en **basis** for V som **består av egenvektorer** til T. La oss kalle den basisen $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ der $\mathbf{v}_i$ er de $\mathbf{v}_i$ er egenvektorer med egenverdi λ_i, dvs $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ og $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i$. Standardmatrisen som beskriver T med hensyn til basisen $\mathscr{B}$ blir da diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Etter identitetsmatrisen er dette den enkleste typen matrise vi kan drømme om. Å gange en vektor med D er veldig enkel. Å diagonalisere T er altså denne prosessen: å finne en basis som består av egenvektorer til T og så beskrive T ved hjelp av standardmatrisen D som er en diagonalmatrise.

Nå la oss anta at $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er gitt ved å multiplisere med en $n \times n$-matrise A. Hvis A er diagonaliserbar, så betyr diagonalisering helt konkret: Vi finner en diagonalmatrise D med egenverdiene til A på diagonalen og en inverterbar matrise P slik at $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Matrisen P har som kolonner de n lineært uavhengige egenvektorene som eksisterer dersom A er diagonaliserbar.

Å gange med matrisene P og P^{-1} tilsvarer å skifte basisen fra standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ til basisen som består av egenvektorer til A, dvs kolonnene til P. En annen måte å se på ligningen $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ er å se på den ekvivalente formen: $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$. Så på en måte betyr *diagonalisering* at vi transformerer A i diagonalmatrisen D. På mattespråk: Matrisen D er standardmatrisen til lineærtransformasjonen T gitt ved å gange med A med hensyn til en basis som består av egenvektorer til A.

4. Hvis $\mathbf{u}$ er egenvektor til egenverdi 2 og $\mathbf{v}$ egenvektor til egenverdi 3 for en matrise A, så er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$

- lineært avhengige
- lineært uavhengige
- like
- kjedelige

Løsning: $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige. Det forteller oss et teorem i kapittel 10: egenvektorer som hører til **forskjellige egenverdier** er lineært uavhengige. La oss vise denne kjempeviktige påstanden en gang til i dette tilfellet:

Vi vil skrive nullvektoren som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{0} = x_1 \cdot \mathbf{u} + x_2 \cdot \mathbf{v}$$

der x_1 og x_2 er (reelle eller komplekse) tall. Nå ganger vi begge sidene med matrisen A og bruker at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er egenvektorer:

$$\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{0} = A \cdot ({}_1 \cdot \mathbf{u} + x_2 \cdot \mathbf{v}) = 2x_1 \cdot \mathbf{u} + 3x_2 \cdot \mathbf{v}.$$

Nå ganger vi den første ligningen med 2 og trekker resultatet fra den andre ligningen. Da får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 2x_1 \cdot \mathbf{u} + 3x_2 \cdot \mathbf{v} - (2x_1 \cdot \mathbf{u} + 2x_2 \cdot \mathbf{v}) \\ &= (2x_1 - 2x_1) \cdot \mathbf{u} + (3x_2 - 2x_2) \cdot \mathbf{v} \\ &= x_2 \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Vi får altså $x_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Men definisjonen av en egenvektor sier at den **ikke** er nullvektoren. Så da må vi ha $x_2 = 0$ (vi husker at dette følger fra aksiomene for vektorrom). Nå kjører vi den samme prosessen ved å gange med 3, den andre egenverdien, og får på samme måte at $x_1 = 0$. Altså måtte x_1 og x_2 være null fra starten og $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige.

5. La A være en $n \times n$-matrise. Vi kan sjekke om A er diagonaliserbar ved

- å se på elementene på diagonalen i A
- å prøve å finne n lineært uavhengige egenvektorer for A
- å beregne determinanten til A
- å teste om A er inverterbar

Løsning: Teoremet i kapittel 11 forteller oss at vi må sjekke om vi kan finne n lineært uavhengige egenvektorer for A. Den konkrete framgangsmåten, som vi vil øve på senere i dag, er at vi beregner egenverdiene til A ved å løse ligningen $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$ og så tilhørende egenvektorer ved å løse ligningssystemet med matrisen $A - \lambda \cdot I_n$ der λ er en egenverdi. Her husker vi igjen det nyttige teoremet i kapittel 10: egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige. Det gjør livet mye enklere. For hvis vi finner n **forskjellige** egenverdier, så vet vi med en gang at A er diagonaliserbar. Men hvis noen egenverdier oppstår flere ganger som løsning til $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$, så må vi jobbe litt mer.

Korte oppgaver

1. Vi vil finne ut om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar.

Her er fremgangsmåten:

a) Finn egenverdiene til A.

Løsning: Vi finner egenverdiene ved å løse ligningen $\det(A - \lambda I_2) = 0$ for λ:

$$\begin{aligned}0 &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda) \cdot [(3-\lambda) - 8 \\ &= 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 \\ &= (\lambda - 2)^2 - 9.\end{aligned}$$

Egenverdiene er altså :
$\lambda_1 = 3 + 2 = 5$ og $\lambda_2 = -3 + 2 = -1$.

b) Finn tilhørende egenvektorer.

Løsning: Vi ser først på $\lambda_1 = 5$. Vi må finne nullrommet til matrisen $A - 5 \cdot I_2$. Det gjør vi ved å Gauss eliminere matrisen:

$$A - 5 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. En løsning for det tilsvarende ligningssystemet er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss en egenvektor til $\lambda_1 = 5$. Alle endre egenvektorer til $\lambda_1 = 5$ er lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$.

Nå ser vi på $\lambda_2 = -1$. Vi må finne nullrommet til matrisen $A + I_2$:

$$A + I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En løsning for det tilsvarende ligningssystemet er

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss en egenvektor til $\lambda_2 = 1$. Alle endre egenvektorer til $\lambda_2 = 1$ er lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_2$.

c) Avgjør om A er diagonaliserbar.

Løsning: Ja, A er diagonaliserbar. Det følger fra teoremet vi lærte om i kapittel 11 som sier at en 2×2-matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har to lineært uavhengige egenvektorer. Det har vi funnet nå: fordi $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ hører til to forskjellige egenverdier, er de lineært uavhengige.

d) Finn en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Løsning: Diagonalmatrisen D har egenverdiene på diagonalen. Her er det altså

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen P har tilhørende egenvektorer som kolonner. Her må vi respektere rekkefølge vi valgte for egneverdiene. Da blir det

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det er en god øvelse å beregne P^{-1} også. Hvis du ikke husker hvordan man gjør det, er dette tidspunktet for å gå tilbake i pensumet og å lære det igjen. Resultatet er:

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Er matrisen A diagonaliserbar?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Ja
- Nei
- Det kan vi ikke avgjøre

Løsning: Dette er en triangulærmatrise og egenverdiene til A står på diagonalen: de er 2, 1, og -3. Det er tre forskjellige egenverdier og A er en 3×3-matrise. Det betyr at A er diagonaliserbar.

3. La A være en 3×3-matrise med egenverdiene 1 og -2. Anta at vi vet at begge egenrommene er éndimensjonalt. Er matrisen A diagonaliserbar?

- Ja
- Nei
- Det kan vi ikke avgjøre

Løsning: Nei, den er ikke diagonaliserbar. Egenrommene gir oss bare to lineært uavhengige egenvektorer og det holder ikke for å diagonalisere matrisen.

4. La A være en 4×4-matrise med egenverdiene 1, -2, 4. Anta at vi vet at dimensjonen til egenrommet til 4 er to. Er matrisen A diagonaliserbar?

- Ja
- Nei
- Det kan vi ikke avgjøre

Løsning: Informasjonen holder for å vite at A er diagonaliserbar. For summen av dimensjonene til egenrommene til egenverdiene er 4 og det er maksimumet for en 4×4-matrise. Da sier vårt teorem at A er diagonaliserbar.

Lengre oppgaver

1. Vi vil finne ut om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar.

Her er fremgangsmåten en gang til:

a) Finn egenverdiene til A. (De er $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -1$.)

Løsning: Vi finner egenverdiene ved å løse ligningen $\det(A - \lambda I_3) = 0$ for λ. Først beregner vi determinanten ved å gå langs den første raden:

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-\lambda) \cdot [(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 6] \\ &\quad - [2(2-\lambda) - 6] + [6 - 3(1-\lambda)] \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5. \end{aligned}$$

For å løse ligningen $\det(A - \lambda I_3) = 0$ sjekker vi om 0 eller 1 eller -1 er en løsning. Vi ser at -1 faktisk er en løsning. Altså kan vi faktorise ligningen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 \\ &= (\lambda+1)\cdot(-\lambda^2 + 4\lambda + 5) \\ &= (\lambda+1)^2 \cdot (\lambda - 5). \end{aligned}$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = 5$ med algebraisk multiplisitet én og $\lambda_2 = -1$ med algebraisk multiplisitet to.

b) Finn tilhørende egenvektorer.

Løsning: Vi ser først på $\lambda_1 = 5$. Vi må finne nullrommet til matrisen $A - 5 \cdot I_3$. Det gjør vi ved å Gauss eliminere matrisen:

$$A - 5 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -18 & 12 \\ 0 & 18 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En løsning for det tilsvarende ligningssystemet er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss en egenvektor til $\lambda_1 = 5$. Alle endre egenvektorer til $\lambda_1 = 5$ er lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$.

Nå ser vi på $\lambda_2 = -1$. Vi må finne nullrommet til matrisen $A + I_3$. Det gjør vi ved å Gauss eliminere matrisen:

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I dette tilfellet finner vi to lineært uavhengige vektorer som løser det tilsvarende ligningssystemet:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alle endre egenvektorer til $\lambda_2 = -1$ er lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$.

c) Avgjør om A er diagonaliserbar.

Løsning: Ja, A er diagonaliserbar. Det følger fra teoremet vi lærte om i kapittel 11 som sier at en 3×3-matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har tre lineært uavhengige egenvektorer. Det har vi funnet nå, fordi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.

d) Finn en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Løsning: Diagonalmatrisen D har egenverdiene på diagonalen. Her er det altså

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen P har tilhørende egenvektorer som kolonner. Her må vi respektere rekkefølge vi valgte for egneverdiene. Ellers kan vi velge fritt. Da blir det

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det er igjen en god øvelse å beregne P^{-1} også. Husk at du burde kunne teknikken for hvordan man gjør dette. Resultatet er:

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Er matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

Du kjenner oppskriften for hvordan man sjekker det, ikke sant?

Løsning: Vi må beregne egenverdiene. Det gjør vi ved å løse ligningen $\det(A - \lambda \cdot I_2) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda \cdot I_2) = (2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) + 1 \\ &= 8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Altså har A bare én egenverdi. Fordi A ikke er en diagonalmatrise selv, kan vi her allerede konkludere at A ikke er diagonaliserbar. For produktet $P \cdot D \cdot P^{-1}$ med $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot I_2$ er

$$P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot (3 \cdot I_2) \cdot P^{-1} = 3 \cdot I_2 \neq A.$$

Men la oss uansett sjekke hvor mange lineært uavhengige egenvektorer vi kan finne. Vi må løse ligningssystemet med matrise $A - 3 \cdot I_2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet her altså bare lineærkombinasjoner av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som løsninger. Vi kan altså ikke finne to lineært uavhengige egenvektorer til A. Dermed er A ikke diagonaliserbar.

3. Er matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

Løsning: Vi må beregne egenverdiene. Det gjør vi ved å løse ligningen $\det(A - \lambda \cdot I_2) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda \cdot I_2) = (1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 2 \\ &= 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = (\lambda - 2)^2 + 1 \\ &= (\lambda - 2 - i) \cdot (\lambda - 2 + i). \end{aligned}$$

Altså har A ingen reelle, men to komplekse egenverdier $\lambda_1 = 2 + i$ og $\lambda_2 = 2 - i$. Vi ser dermed at A ikke er diagonaliserbar som en *reell* matrise, fordi vi ikke har noen reelle egenverdier.

Men A er diagonaliserbar som en *kompleks* matrise. Hva betyr dette? Det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, men elementene i matrisene D, P og P^{-1} er komplekse tall. Vi finner disse matrisene på den samme måten som før: D har egenverdiene på diagonalen og kolonnene i P er tilhørende egenvektorer. Vi vet altså allerede at $D = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$. Vi mangler egenvektorer. De finner vi nå ved å løse de riktige ligningssystemene. For $\lambda_1 = 2+i$ ser vi på matrisen $A-(2+i)\cdot I_2$:

$$\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi husker her at vi allerede vet at systemet har en løsning som ikke er nullvektoren fordi λ er en egneverdi. Vi vet altså at radene er ekvivalente og kan glemme en av dem uten at vi trenger å regne mer. Hvis du ikke stoler på det husk at $\frac{2}{1+i} = 1 - i$.

Det gir oss egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$. For $\lambda_2 = 2 - i$ ser vi på matrisen $A - (2 - i) \cdot I_2$:

$$\begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen P er altså $P = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Anta vi vet at 2×2-matrisen A har egenverdi 2 med egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og egenverdi 3 med egenvektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Kan vi finne A?

Løsning: Vi har informasjonen at A har to forskjellige egenverdier. Fordi A er en 2×2-matrise, vet vi dermed at A er diagonaliserbar. Det finnes altså en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P med $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ og vi vet hvordan D og P ser ut:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner $P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Nå finner vi A:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

5. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall a og b er A diagonaliserbar?

Løsning: Starten er nå rutine. Det eneste skumle er at det står to ukjente a og b i matrisen. Men det ser vi først bort fra og kjører fram med oppskriften. Vi beregner egenverdiene ved å gå langs den første raden:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2a & b-\lambda & a \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (-3 - \lambda) \cdot (b - \lambda) \cdot (2 - \lambda). \end{aligned}$$

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = -3$. Hvis b **ikke** er lik 2 eller -3, så har vi tre foskjellige egenverdier og A er diagonaliserbar på grunn av vårt favoritt teorem.

Hvis b er lik 2 eller -3, så må vi jobbe litt mer. For vi må sjekke om vi kan finne én eller to lineært uavhengige egenvektorer til egenverdi 2 henholdsvis -3.

Vi ser først på $b = 2$ og $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: Vi må løse ligningsystemet $A - 2 \cdot I_3$:

$$A - 2 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En løsning til det tilsvarende systemet er vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Hvis $a \neq 0$, kan vi ikke finne andre lineært uavhengige løsninger. Men hvis $a = 0$, så er også $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en løsning som er lineært uavhengig av $\mathbf{v}$. Vi ser altså at A er diagonaliserbar hvis $b = 2$ og $a = 0$, men ikke diagonaliserbar hvis $b = 2$ og $a \neq 0$.

Nå ser vi på $b = -3$ og $\lambda_1 = \lambda_3 = -3$: Vi må løse ligningssystemet $A - 3 \cdot I_3$:

$$A - (-3) \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er iallfall en løsning og dermed en egenvektor. Men nå kan vi finne en annen løsning som er lineært uavhengig av $\mathbf{v}$. For uansett hvilken verdi a har, er matrisen radekvivalent til matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Altså er $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ også en egenvektor og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige. Vi ser altså at A er diagonaliserbar hvis $b = -3$ for alle verdier for a.

(Hvis du synes at det er rart at vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dukker opp som egenvektor i begge tilfeller, så må vi huske at så på to forskjellige verdier for b også. For $b = 2$ og $\lambda_3 = -3$ er $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke en egenvektor. Sjekk dette selv for å overbevise deg.)