Øvingsforelesning til 13 - Systemer av differensialligninger

Spørsmål og oppgaver

1. La $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ være et system av differensialligninger med 2×2-matrise A. Vi kan finne en løsning

- ved å Gausseliminere systemet
- ved å spørre Wolframalpha
- ved å finne egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer

Løsning: Vi finner den generelle løsningen ved å finne egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer. Så finnes det tre muligheter hvordan vi kan skrive ned den generelle løsningen avhengig av om vi har enten to forskjellige reelle egenverdier, bare én reell egenverdi eller to kompleks konjugerte egenverdier.

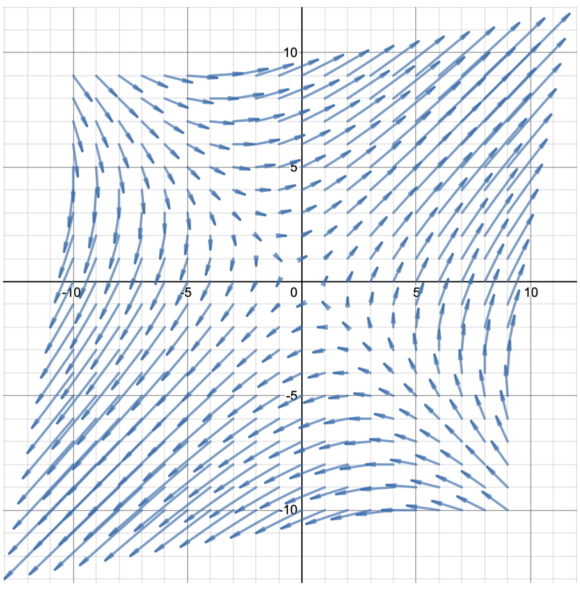
2. La $\mathbf{y}$ være en løsning til systemet $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$. Hvilken funksjon er **ikke** en del av koordinatene til $\mathbf{y}$?

$$a)\ e^t,\ b)\ e^{-2t},\ c)\ e^{3t}$$

Løsning: Fordi matrisen er en triangulærmatrise, vet vi at egenverdiene er 1 og -2 som er tallene som står på diagonalen. Derimot er 3 ikke en egenverdi. Det betyr at funksjonen e^{3t} ikke er en del av løsningen.

I de følgende to oppgavene ser vi på fasediagrammene til systemer $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med 2×2-matrise A. I hver oppgave er spørsmålet hva vi kan si om systemet:

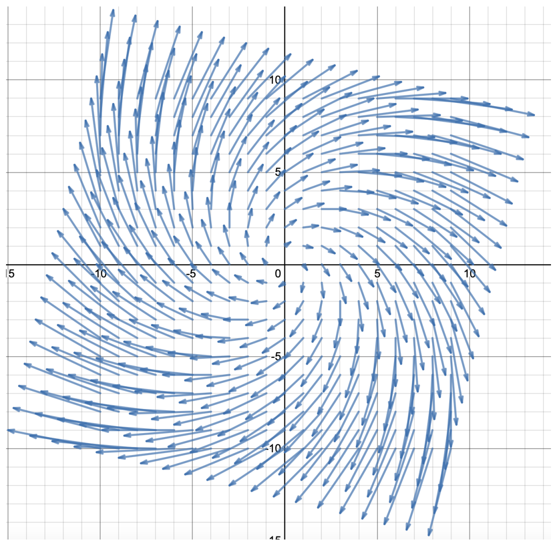
3.



- A har to forskjellige egenverdier, begge er positive
- A har to forskjellige egenverdier, begge er negative
- A har to forskjellige egenverdier, én er positiv og én er negativ
- kun én egenverdi
- to komplekse, ikke reelle, egenverdier

Løsning: Vi ser to akser i diagrammet: én akse i retning $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og én i retning $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Det tilsvarer til to forskjellige reelle egenverdier. Fordi pilene blir større og peker fra origoen i retning $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, har vi en positiv egenverdi. Fordi pilene blir mindre og peker til origoen i retning $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, har vi en negativ egenverdi. Feltet hører til systemet med totalmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4.



- A har to forskjellige egenverdier, begge er positive
- A har to forskjellige egenverdier, begge er negative
- A har to forskjellige egenverdier, én er positiv og én er negativ
- kun én egenverdi

- to komplekse, ikke reelle, egenverdier

Løsning: Løsningene roterer i spiraler rundt origoen. Altså har vi to komplekse, ikke reelle, egenverdier. Pilene vokser bort fra origoen som betyr at realdelen av egenverdiene er positiv. Feltet hører til systemet med totalmatrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

5. La $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ være et system av differensialligninger med en 2×2-matrise A. Hvis $\mathbf{y}(t) = 3e^{2t}\left(\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ er en løsning, så må A har

- egenverdiene 3 og 1
- bare egenverdi 2
- kompleks egenverdi $2i$

Løsning: Vi husker fra lista for løsningsalternativene i kapittel 13 at $\mathbf{y}(t) = ce^{\lambda t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ bare oppstår som en løsning når A har bare én reell egenverdi λ som i dette tilfellet er $\lambda = 2$.

6. La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner som oppfyller differensialligningene

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= -x(t). \end{aligned}$$

a) Finn den generelle løsningen til systemet.

Løsning: Matrisen som beskriver systemet er $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Det ser vi ved å skrive koeffisientene til $x(t)$ og $y(t)$ som elementene i matrisen. Her må vi huske at koeffisienten er 0 dersom $x(t)$ eller $y(t)$ ikke dukker opp i en ligne. Så beregner vi egenverdiene til A ved å løse ligningen $(-\lambda)^2 + 4 = 0$. Det gir oss egenverdiene $\lambda = 2i$ og $\hat{\lambda} = -2i$. Vi har altså to komplekse egenverdier (som er da kompleks konjugerte til hverandre).

Nå kan vi følge oppskriften gitt i kapittel 13 som gir oss den generelle løsningen. Det funker ved å finne en egenvektor til egenverdi λ: vi løser ligningssystemet

$$A - (2i) \cdot I_2 = \begin{bmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{bmatrix}$$

og får en egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$.

Løsningene til differensialligningen er nå gitt av *realdelen* og *imaginærdelen* til

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} e^{2it}.$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos 2t + 2i \sin 2t \\ -\sin 2t + i\cos 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Den generelle løsningen er altså på formen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}.$$

b) Finn den unike løsningen med initialverdi

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi må bestemme koeffisientene c_1 og c_2 i den generelle løsningen slik at initialverdien passer. For $t = 0$, og dermed $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$, er den generelle løsningen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Vi trenger altså $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$. Den unike løsningen er

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t + 2\sin 2t \text{ og} \\ y(t) &= -\sin 2t + \cos 2t. \end{aligned}$$

7. I denne oppgaven er målet vårt å finne et system av lineære differensialligninger

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

som har generell løsning

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

a) Hvilken informasjon har vi om matrisen A?

Løsning: Den generelle løsningen forteller oss hva egenverdiene og tilhørende egenvektorer er. For den generelle løsningen er på formen *konstant* gang *egenvektor* $\mathbf{v}$ gang $e^{\lambda t}$ der λ er egenverdi til $\mathbf{v}$. Matrisen A til ligningssystemet har altså egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med korresponderende egenverdier henholdsvis 1 og -1.

b) Hvordan kan vi bruke informasjonen for å finne matrisen?

Løsning: 1. Alternativ: Vi skriver matrisen A på formen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vi må finne verdiene for a, b, c og d. Vi bruker nå hva vi vet om egenverdiene og egenvektorene til A. Vi vet

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b \\ 2c + d \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ c + d \end{bmatrix}.$$

Vi har altså ligningene

$$2a + b = 2 \text{ og } a + b = -1 \Rightarrow a = 3 \text{ og } b = -4$$

og ligningene

$$2c + d = 1 \text{ og } c + d = -1 \Rightarrow c = 2 \text{ og } d = -3.$$

Matrisen A er altså matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ og systemet av differensialligninger vi leter etter er

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 4y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= 2x(t) - 3y(t). \end{aligned}$$

2. Alternativ: For å finne matrisen A bruker vi at $A = PDP^{-1}$ der P er matrisen med egenvektorene som kolonner og D er en diagonalmatrise med egenverdiene på diagonalen. Husk at vi må ha samme rekkefølge som for kolonnene. Merk at dette er den omvendte prosessen vi bruker for å løse et system av differensialligninger.

Vi har alltså $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Nå beregner vi

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Systemet av differensialligninger vi leter etter er altså

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 4y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= 2x(t) - 3y(t). \end{aligned}$$

8. (Høst 2020, oppgave 4) La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner som oppfyller differensialligningene

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 2y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= 4x(t) - 3y(t). \end{aligned}$$

For hvilken av de følgende initialverdiene ligger vektorene $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ på en linje i $\mathbb{R}^2$ for alle t?

Svaralternativene:

$$a) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; c) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Her er det viktigste at vi skjønner når det kan skje at løsningsvektorene ligger på en linje for alle t. Det skjer akkurat når vi her en akse i fasediagrammet. Når vi starter da på et punkt på aksen, så beveger vi oss hele tiden på den aksen, enten mot origoen eller bort fra den. Isåfall er aksen i diagrammet linjen gjennom origoen og en egenvektor til matrisen. Vi trenger altså iallfall reelle egenverdier for at dette skjer.

I formelen ser vi det også: Vi vil at løsningen er på formen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = f(t) \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

for alle t der $f(t) \in \mathbb{R}$ er en funksjon med verdier i $\mathbb{R}$. Da er løsningskurven en rett linje gjennom $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$.

Dette kan kun skje dersom $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ peker i samme retning som $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$, dvs

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

må være et reelt tall gang vektoren

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = f(t) \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

Dermed må $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$ være en egenvektor for matrisen som hører til systemet. For å svare på spørsmålet må vi altså finne egenvektorene og velger en initialverdi som er en egenvektor. Vi må altså finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

knyttet til systemet. Vi må altså finne alle λ som oppfyller $(3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8 = 0$. Vi løser denne ligningen:

$$0 = \lambda^2 - 9 + 8 \iff \lambda^2 = 1 \iff \lambda = \pm 1.$$

Vi har altså to forskjellige reelle egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = 1$.

For $\lambda = -1$ får vi en egenvektor ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir oss egenvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ til egenverdi $\lambda = -1$.

Etter at vi har delt begge koordinatene på 2, ser vi at vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor.

For $\lambda = 1$ får vi en egenvektor ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det gir oss egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ til egenverdi $\lambda = 1$. Men denne vektoren var ikke et svaralternativ. Riktig svar er dermed b) og vektoren $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.