Øvingsforelesning til 13 - Systemer av differensialligninger

Spørsmål og oppgaver

1. La $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ være et system av differensialligninger med 2×2-matrise A. Vi kan finne en løsning

- ved å Gausseliminere systemet
- ved å spørre Wolframalpha
- ved å finne egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer

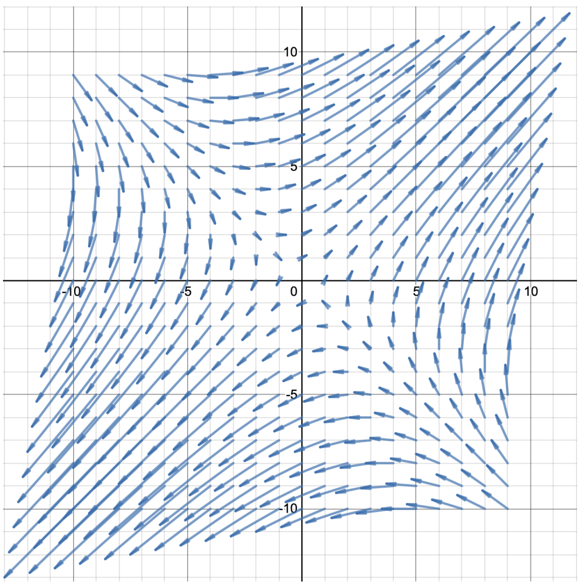
2. La $\mathbf{y}$ være en løsning til systemet $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$. Hvilken funksjon er **ikke** en del av koordinatene til $\mathbf{y}$?

$$a)\ e^t,\ b)\ e^{-2t},\ c)\ e^{3t}$$

Løsning: Fordi matrisen er en triangulærmatrise, vet vi at egenverdiene er 1 og -2 som er tallene som står på diagonalen. Derimot er 3 ikke en egenverdi. Det betyr at funksjonen e^{3t} ikke er en del av løsningen.

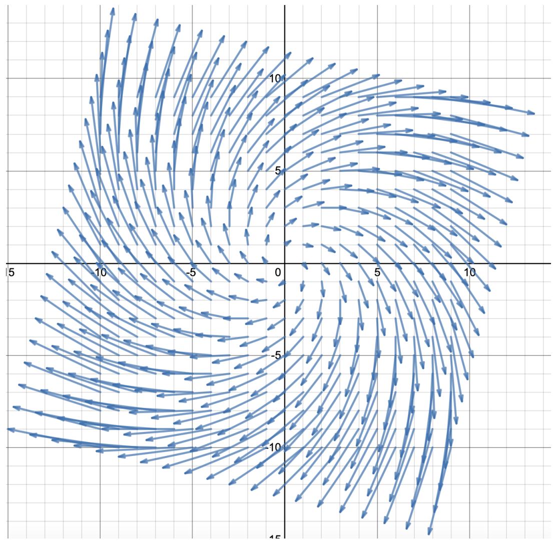
I de følgende to oppgavene ser vi på fasediagrammene til systemer $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med 2×2-matrise A. I hver oppgave er spørsmålet hva vi kan si om systemet:

3.



- A har to forskjellige egenverdier, begge er positive
- A har to forskjellige egenverdier, begge er negative
- A har to forskjellige egenverdier, én er positiv og én er negativ
- kun én egenverdi
- to komplekse, ikke reelle, egenverdier

4.



- A har to forskjellige egenverdier, begge er positive
- A har to forskjellige egenverdier, begge er negative
- A har to forskjellige egenverdier, én er positiv og én er negativ
- kun én egenverdi
- to komplekse, ikke reelle, egenverdier

5. La $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ være et system av differensialligninger med en 2×2-matrise A. Hvis $\mathbf{y}(t) = 3e^{2t}\left(\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ er en løsning, så må A har

- egenverdiene 3 og 1
- bare egenverdi 2
- kompleks egenverdi $2i$

6. La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner som oppfyller differensialligningene

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= -x(t). \end{aligned}$$

a) Finn den generelle løsningen til systemet.

b) Finn den unike løsningen med initialverdi

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. I denne oppgaven er målet vårt å finne et system av lineære differensialligninger

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

som har generell løsning

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

a) Hvilken informasjon har vi om matrisen A?

b) Hvordan kan vi bruke informasjonen for å finne matrisen?

8. (Høst 2020, oppgave 4) La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner som oppfyller differensialligningene

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 2y(t) \text{ og} \\ y'(t) &= 4x(t) - 3y(t). \end{aligned}$$

For hvilken av de følgende initialverdiene ligger vektorene $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ på en linje i $\mathbb{R}^2$ for alle t?

Svaralternativene:

$$a) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; c) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$