Øvingsforelesning 13 - Repetisjon

Spørsmål og oppgaver

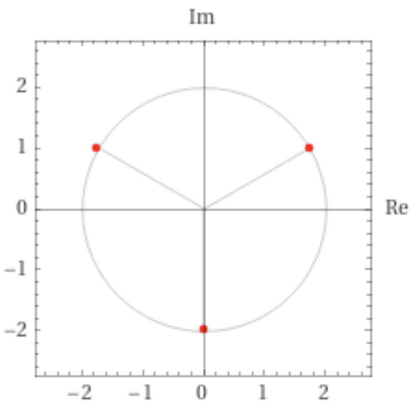
1. (Vår 2016, oppgave 1b)) Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = 8i$ og tegn dem i det komplekse planet.

Løsning: Polarformen til $8i$ er $8e^{i\pi/2} = 2^3 e^{i\pi/2}$. For $z = re^{i\theta}$, $z^3 = 8i$ blir da

$$2^3 e^{i\pi/2} = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta}.$$

Denne ligningen holder hvis og bare hvis $r = 2$ og $\theta = \pi/6 + 2\pi k/3$ for et heltall k. For å finne alle løsningene er det nok å se på $k = 0$, $k = 1$ og $k = 2$. Det gir oss løsningene

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i,$$
$$z_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i \text{ og}$$
$$z_2 = 2e^{i3\pi/2} = -2i.$$



2. (Prøveeksamen Vår 2021, oppgave 9) Hvilken av følgende påstander er riktig? For en $n \times n$-matrise A har vi

- $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = 0$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq 1$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq n-1$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \geq n-1$
- $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = n$

Løsning: Hvis $\det(A) = 0$ vet vi at matrisen ikke er inverterbar og at kolonnene er lineært avhengige. Det betyr at maksimalt $n-1$ kolonner i A kan være lineært uavhengige og dermed at dimensjonen til kolonnerommet er maksimalt $n-1$. Dimensjonen kan være lik $n-1$, men kan også være mindre. Vi kan ikke si mer. Riktig svar er altså at $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq n-1$.

3. (Vår 2020, oppgave 13) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speiler en vektor om x-aksen. Hva er egenverdiene til T?

- T har ingen egenverdier
- 1 og 0
- ± 1
- 1 og 0 og -1
- $\pm i$

Løsning: Lineærtransformasjonen T har egenverdiene 1 og -1 ettersom vi beregner $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

4. (Vår 2016, oppgave 4)

La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}3\\6\\-1\end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$.

a) Skriv vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}2\\4\\-10\end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$.

Løsning: Vi vil finne tall x_1, x_2, x_3 slik at $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = \mathbf{p}$. For å finne dem løser vi ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ med matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\1 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

ved å Gauss eliminere totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\2 & 4 & 6 & 4\\1 & 6 & -1 & -10\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & -4 & -12\end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & 8\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Vi kan velge x_3 som en fri variabel og sette $x_3 = 1$. Så trenger vi $x_2 = -2$ og $x_1 = 3$. Vi får altså $\mathbf{p} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

b) Kan man skrive vektoren $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$?

Løsning: Hvis vi prøver det samme med vektoren $\mathbf{q}$, så får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right].$$

Den andre raden tilsvarer ligningen $0 = 1$. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{q}$ har dermed ingen løsninger og vi kan ikke skrive $\mathbf{q}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

c) Er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineært uavhengige?

Løsning:

Vektorene er lineært avhengige. Det er mange måter å se sjekke det på. y independent. For eksempel kan vi bruke vår tidligere beregning for å se at $(-5)\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

5. (Kont 2021, oppgave 6)

La a være et reelt tall og

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & a & 6-a \end{bmatrix}.$$

a) Finnes det reelle verdier for a slik at A er inverterbar? I så fall, hvilke?

Løsning: Nei, den tredje kolonnen er to ganger den første kolonnen minus den andre kolonnen. Derfor er rangen på det meste 2, og matrisen er aldri inverterbar. Vi kan også vise dette ved å beregne determinanten til matrisen og sjekke at den alltid er 0 uavhengig av verdien for a. Vi beregner $\det(A)$ ved å gå langs den tredje kolonnen:

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & a & 6-a \end{bmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{bmatrix}\right) + (6-a) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2a - 12 + (6-a) \cdot (4-2) \\ &= 2a - 12 + 12 - 2a \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$, for alle verdier av a.

Løsning: Ved å sammenligne de første to radene, observerer vi at de to første kolonnene er lineært uavhengige siden de ikke er multiplum av hverandre. Siden den tredje kolonnen er lineært avhengig av de to første får vi en basis gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{bmatrix} \right\}.$$

Alternativt kan vi finne en basis ved å Gauss eliminere matrisen for å se hvilke kolonner i A er pivotkolonner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & a & 6-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & a-3 & 3-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at den første og den andre raden i A (husk her at vi må gå tilbake til den opprinnelige matrisen!) er pivotkolonner og danner dermed en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

c) Hva er dimensjonen til $\mathrm{Null}(A)$, for alle verdier av a?

Løsning: Vi har nå lært at kolonnerommet er 2–dimensjonalt. Ved Rank-Nullity teoremet vil da nullrommet ha dimensjon $3 - 2 = 1$.

Alternativt kan vi igjen bestemme nullrommet direkte ved å Gauss eliminere matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & a & 6-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & a-3 & 3-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har én fri variabel og nullrommet er dermed 1–dimensjonalt. Faktisk er $\mathrm{Null}(A)$ utspent av $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Finnes det en $\mathbf{b}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ingen/en unik/uendelig mange løsninger? Diskuter alle alternativene.

Løsning: Siden $\mathrm{Col}(A)$ er 2–dimensjonalt, finnes det vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^3$, men ikke i $\mathrm{Col}(A)$. For en slik $\mathbf{b}$ har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning.

Hvis $\mathbf{b}$ ligger i $\mathrm{Col}(A)$ derimot, har ligningen minst én løsning. Men $\mathbf{x}$ er en slik løsning, så kan vi legge alle multipler av en vektor i nullrommet til $\mathbf{x}$ for å få uendelig mange løsninger. Det er bare disse to tilfellene, og det følger at det ikke er noen $\mathbf{b}$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik løsning.

6. (Prøveeksamen Vår 2021, oppgave 14) La $\mathcal{P}$ være vektorrommet bestående av polynomer med reelle koeffisienter. Vi ser på indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Finn projeksjonen av polynomet $p(x) = x^3$ ned på underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1.

Løsning: Underrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1, la oss kalle det P_1, har standardbasis $(1, x)$. Siden

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

er basisen ortogonal. Det betyr at vi kan regne ut projeksjonen $P_{\mathcal{P}_1}(x^3)$ slik:

$$P_{\mathcal{P}_1}(x^3) = P_1(x^3) + P_x(x^3) = \frac{\langle 1, x^3 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle x, x^3 \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x.$$

Vi regner ut de ulike indreproduktene:

$$\begin{aligned} \langle 1, x^3 \rangle &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^3 dx = 0 \text{ (så } \frac{\langle 1, x^3 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = 0) \\ \langle x, x^3 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x^3 \, dx = \frac{2}{5} \\ \langle x, x \rangle &= \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vi får altså

$$P_{\mathcal{P}_1}(x^3) = P_x(x^3) = \frac{2/5}{2/3} \cdot x = \frac{3}{5}x.$$

b) La $\mathcal{P}_2$ være underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Finn et reelt tall t slik at basisen $\mathscr{B} = (1, x, x^2 - t)$ er ortogonal med hensyn til indreproduktet beskrevet over (du trenger ikke vise at $\mathscr{B}$ er en basis for alle reelle tall t).

Løsning: Dersom basisen $\mathscr{B} = (1, x, x^2 - t)$ skal være ortogonal, må vi ha

$$\langle 1, x\rangle = 0, \langle 1, x^2 - t\rangle = 0 \text{ og } \langle x, x^2 - t\rangle = 0.$$

Vi vet fra tidligere at $\langle 1, x\rangle = 0$, så der er alt greit. Vi har også

$$\langle x, x^2 - t\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - t)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - xt)\ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}tx^2\right]_{-1}^{1} = 0,$$

så x og $x^2 - t$ er ortogonale uavhengig av hva t er. Til slutt har vi

$$\langle 1, x^2 - t\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - t)\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - tx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - 2t.$$

Vi vil ha

$$\frac{2}{3} - 2t = 0,$$

som har løsning $t = \frac{1}{3}$. Altså er basisen $\mathscr{B} = (1, x, x^2 - t)$ ortogonal når $t = \frac{1}{3}$.

7. (Vår 2020, oppgave 36) En løsning av

$$y'' - y' + 4y = 0$$

tilfredsstiller $y(0) = 0$ og $y(1) = 1$. Hva er $y(1)$?

Løsning: Det er gitt at $y(t)$ oppfyller differensialligningen $y'' - 4y' + 4y = 0$ sammen med $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$. For å finne y løser vi først ligningen

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2.$$

Vi husker fra Kapittel 14 i forelesningsnotatene at funksjonen y er der på formen

$$y(t) = e^{2t}(c_1 t + c_0)$$

med konstanter c_0 og c_1. Vi kan bestemme konstantene c_0 og c_1 ved hjelp av initialverdiene:

$$y(0) = 0 \iff e^0(c_1 \cdot 0 + c_0) = 0 \iff c_0 = 0.$$

Med $y'(t) = e^{2t}(c_1(2t + 1) + 2c_0)$ og $c_0 = 0$ får vi

$$y'(0) = 1 \iff e^0 c_1 = 1 \iff c_1 = 1.$$

Vi får altså $y(t) = te^{2t}$. Nå kan vi beregne $y(1) = e^2$.