i

Eksamensforside TMA4110 og TMA4115 Kont 2020

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4110/TMA4115 Matematikk 3

Eksamensdato: 17.08.2020

Eksamenstid (fra-til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A / Alle hjelpemidler tillatt

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Solberg[b]

Tlf.: [a]mobil Aslak, [b]mobil Morten

Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel

Tlf: 73 59 16 00

ANNEN INFORMASJON:
Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet.

Lagring: Besvarelsen din i Inspera Assessment lagres automatisk. Jobber du i andre programmer – husk å lagre underveis.

Juks/plagiat: Eksamen skal være et individuelt, selvstendig arbeid. Det er tillatt å bruke hjelpemidler.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst i høyre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidater for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din tilgjengelig.

Vekting av oppgavene: Eksamen består av 40 oppgaver. Alle oppgaver vektes likt. Kandidatene må besvare minst 16 oppgaver korrekt for å stå.

OM LEVERING:

Besvarelsen din leveres automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, forutsatt at minst én oppgave er besvart. Dette skjer selv om du ikke har klikket «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgavesettet. Du kan gjenåpne og redigere besvarelsen din så lenge prøven er åpen. Dersom ingen oppgaver er besvart ved prøveslutt, blir ikke besvarelsen din levert.

Trekk fra eksamen: Ønsker du å levere blankt/trekke deg, gå til hamburgermenyen i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1

Oppgave 1

Løs ligningssystemet:

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + z &= 2 \\
2x - y + 4z &= 12 \\
2x + y + z &= 7
\end{aligned}
$$

Svar: x = [ ] , y = [ ] , z = [ ] .

Maks poeng: 1

2

Oppgave 2

Anta at redusert trappeform av totalmatrisen (den utvidede matrisen) til et ligningssystem har formen:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}
$$

Hvor mange løsninger har systemet?

Velg ett alternativ:

- Uendelig mange.
- Ingen.
- Nøyaktig en.
- Det avhenger av verdien til a.

Maks poeng: 1

3

Oppgave 3

Anta at totalmatrisen (den utvidede matrisen) til et ligningssystem er:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hvor mange løsninger har systemet?

Velg ett alternativ:

- Nøyaktig én
- Nøyaktig tre
- Ingen
- Uendelig mange

Maks poeng: 1

4

Oppgave 4, 5

4) La $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. For hvilken vektor $\vec{z}$, er mengden $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineært uavhengig?

Velg ett alternativ:

- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5) La $\vec{x} = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. For hvilken vektor $\vec{z}$, er mengden $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ en basis for $\mathbb{C}^3$?

Velg ett alternativ:

- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 2

5

Oppgave 6

6) Hvilken av påstandene er riktig for alle $n \times n$-matriser A og B?

Velg ett alternativ:

- Dersom det finnes $n \times n-$ matrise C slik at $CA = CB$ så er $A = B$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- Dersom $A^2 = B^2$, så er $A = \pm B$
- $AB = BA$

Maks poeng: 1

6

Oppgave 7, 8, 9, 10

La $A\vec{x} = \vec{b}$ være et ligningssystem, der A er en $n \times n$ -matrise over $\mathbb{R}$, der $n > 2$. Er følgende sant eller usant?

7) Systemet har alltid minst én løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

8) Dersom to kolonner i A er like, så har systemet ingen løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

9) Dersom to kolonner i A er like, så har systemet uendelig mange løsninger.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

10) Dersom alle kolonnene i A er forskjellige, så har systemet minst en løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 4

7

Oppgave 11, 12

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11) Hva er egenverdiene til A?

Velg ett alternativ:

- 0 og 1
- 1 og 4
- 1 og 2 og -2
- 0 og 1 og 4

12) Hvilken av følgende matriser P gjør at $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise?

Velg ett alternativ:

- $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 2

8

Oppgave 13

13) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen som speiler en vektor om yz-planet. Hva er egenverdiene til T ?

Velg ett alternativ:

- $1 \text{ og } 0 \text{ og } -1$
- T har ingen egenverdier
- $1 \text{ og } 0$
- ± 1
- $\pm i$

Maks poeng: 1

9

Oppgave 14

14) La $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$, og $a \neq b$. Hvilken av de følgende er sann?

Velg ett alternativ:

- A er ikke diagonaliserbar for noen verdier av a og b
- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og $b \neq 0$
- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og b
- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og $b = 0$

Maks poeng: 1

10 Oppgave 15

15) Anta at A og B er 2×2 matriser, som begge har egenverdi $\lambda = 3$. Hvilken av følgende er sann?

Velg ett alternativ:

- Vi kan ikke vite noe om egenverdiene til AB
- AB har egenverdi 9
- AB har egenverdi 6
- AB har egenverdi 3

Maks poeng: 1

11

Oppgave 16, 17, 18, 19, 20

16) Ingen matriser kan ha egenverdi 0.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

17) Ingen 3×3-matriser har 4 forskjellige egenverdier.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

18) La Avære en 3×3-matrise, og la $\vec{x}, \vec{y}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$. Hvis $A\vec{x} = 3\vec{x}$ og $A\vec{y} = 2\vec{y}$, så må $\vec{x}$ og $\vec{y}$ være lineært uavhengige.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

19) La A være en reell 3×3-matrise. Hvis det finnes en basis for $\mathbb{R}^3$som består av egenvektorer for A, så har A tre forskjellige egenverdier.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

20) La Avære en reell 3×3-matrise. Hvis det finnes vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{C}^3$, slik at $A\vec{x} = (1+i)\vec{x}$, så må det finnes vektor $\vec{y}$ slik at $A\vec{y} = (1-i)\vec{y}$

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 5

12 Oppgave 21, 22, 23

Er følgende delmengder vektorrom?

21) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

22) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = yz \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

23) $\left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \;\middle|\; p(1) = 0 \right\} \subseteq \mathcal{P}_2$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

Maks poeng: 3

13

Oppgave 24, 25, 26, 27

Er følgende funksjoner en lineærtransformasjon?

24) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix}.$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

25) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(y+1) \end{bmatrix}.$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

26) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3, \quad T(p(x)) = xp'(x)$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

27) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T(\vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{v}$, hvor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Velg et alternativ

- Ja
- Nei

Maks poeng: 4

14

Oppgave 28, 29, 30

Er følgende påstander sanne eller usanne?

28) Hvert endeligdimensjonalt vektorrom har en basis.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

29) Alle injektive lineærtransformasjoner $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har en invers.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

30) La $\mathcal{P}_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Alle injektive lineærtransformasjoner $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ har en invers.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 3

15 Oppgave 31, 32

Ta utgangspunkt i datasettet som består av punktene $(-1,0)$, $(0,1)$ og $(2,2)$ i $\mathbb{R}^2$.

31) Hvilken linje passer best til punktene?

Velg ett alternativ:

- $y = x + 1$
- $9x + \frac{11}{14}$
- $y = \frac{9}{14}x + \frac{11}{14}$
- $y = \frac{11}{14}x + \frac{9}{14}$

32) Hvilket polynom av grad 2 går gjennom alle punktene?

Velg ett alternativ:

- $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$
- $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$
- $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$
- $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$

Maks poeng: 2

16

Oppgave 33, 34

La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være gitt ved $T(p(x)) = x^2 p''(x)$. La $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ være en basis for $\mathcal{P}_2$.

33) Hva er $[T]_{\mathcal{B}}$?

Velg ett alternativ:

- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

34) Hvilket alternativ er sant?

Velg ett alternativ:

- 0 og 2 er egenverdier for T
- T har ingen egenverdier
- 0, 1 og 2 er egenverdier for T
- 0 er eneste egenverdi for T

Maks poeng: 2

17
Oppgave 35

35) Hvilken av matrisene er en regulær stokastisk matrise?
Velg ett alternativ:

- $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 1

18
Oppgave 36

36) En løsning av $y'' - 3y' + 2y = 0$ tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Hva er $y(1)$? Svar: ______ . (Oppgi svaret med tre desimaler.)

Maks poeng: 1

19
Oppgave 37

37) La $\vec{y}$ være en løsning av settet av differensialligninger gitt ved $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$, der $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Hvilken funksjon kan **ikke** være lik hverken $y_1, y_2 \text{ eller } y_3$?
Velg ett alternativ:

- e^{5x}
- e^{3x}
- e^{2x}
- e^{x}

Maks poeng: 1

20

Oppgave 38

38) Hva er polarform av løsningene av ligningen $z^2 + z + 1 = 0$?

Velg ett alternativ:

- $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $e^{\frac{4\pi}{3}i}$
- $2e^{\frac{\pi}{3}i}$ og $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$
- $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $-e^{\frac{2\pi}{3}i}$
- $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

Maks poeng: 1

21

Oppgave 39

39) Hvor mange løsninger i $\mathbb{C}$ har ligningen $z^2 + i\,\overline{z} = 0$?

Velg ett alternativ:

- Nøyaktig én løsning
- Nøyaktig to løsninger
- Ingen løsninger
- Nøyaktig fire løsninger

Maks poeng: 1

22

Oppgave 40

40) Sommeren har vært utmerket for statsstipendiat Skyberg. Hver dag mesket han seg med de lekreste italienske iskremanretninger. Dagen etter en affogato, ble det affogato igjen halvparten av gangene, og ellers like ofte stracciatella som semifreddo. Etter stracciatella ble det aldri affogato, og ellers like ofte stracciatella som semifreddo. Etter semifreddo, valgte han like ofte alle tre variantene. Hvordan ble det i det lange løp?

Velg ett alternativ:

- Det ble like ofte stracciatella og semifreddo, men litt mindre av affogato
- Det ble oftest semifreddo
- Det ble oftest stracciatella
- Det ble like ofte alle tre alternativene

Maks poeng: 1