

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 20

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig 2-sidig

sort/hvit farger

skal ha flervalgskjema

Dato

Sign

Oppgave 1

Vi ønsker å løse ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + 4z = 12 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -5 & -16 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & 32 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & -23 & -69 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Det betyr at systemet har løsning

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 Her ser vi på en totalmatrise for et ligningssystem, som har trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Siste rad gir oss en fri variabel $x_3 = s$, $s \in \mathbb{R}$. Andre rad gir da at $x_2 = a - s$, og første rad gir $x_1 = -2x_2 - 4x_3 = -2(a - s) - 4s = -2a - 2s$. Totalt sett har vi løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og vi har altså *uendelig mange løsninger*, uansett hva a måtte være.

Oppgave 3 Vi ser på et ligningssystem som har tilhørende totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Først og fremst er det verdt å merke seg at et ligningssystem enten har ingen, nøyaktig én eller uendelig mange løsninger. Vi skal finne ut hvor mange løsninger dette systemet har. Vi finner svaret rett og slett ved å prøve å løse ligningssystemet, som vi gjør ved å radredusere totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Vi ser dermed at løsningen er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

med andre ord har systemet *nøyaktig én løsning*.

Oppgave 4 I denne oppgaven lar vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker å finne \mathbf{z} , slik at $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ er en lineært uavhengig mengde. Det vil si at \mathbf{z} må være slik at $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = \mathbf{0}$ impliserer $a = b = c = 0$. Eventuelt en \mathbf{z} som ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av \mathbf{x} og \mathbf{y} . Nullvektoren kan ikke være med i mengden, fordi $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ uansett hva c er. Videre ser vi at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \text{ og at } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

Det eneste alternativet som gjenstår er dermed

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her er det flere måter å løse oppgaven på. For eksempel kunne vi dratt nytte av at en matrise har determinant ulik null hvis og bare hvis kolonnevektorene er lineært uavhengige. Det betyr at vi kan sette opp matrisen $[\mathbf{x}|\mathbf{y}|\mathbf{z}]$ for hvert alternativ for \mathbf{z} , og se hvilken matrise som har determinant ulik null.

Oppgave 5 I denne oppgaven lar vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker å finne \mathbf{z} slik at $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ utgjør en basis for \mathbb{C}^3 . Hvis vi har en mengde bestående av tre lineært uavhengige vektorer fra \mathbb{C}^3 vil denne mengden utgjøre en basis for \mathbb{C}^3 . Vi finner derfor \mathbf{z} slik at mengden er lineært uavhengig. Tankegangen er den samme som i Oppgave 4. Nullvektoren kan ikke være med, og vi ser at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i\mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ og at } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = i\mathbf{x} + 2\mathbf{y}.$$

Det riktige alternativet må dermed være

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6 Vi ønsker å finne ut hvilken av påstandene som er riktig for alle $n \times n$ -matriser A og B .

Påstand 1: $AB = BA$. Dette er *ikke sant*. Matrisemultiplikasjon er generelt ikke kommutativt. Vi får et moteksempel hvis vi lar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

får vi

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så i dette tilfellet er $AB \neq BA$.

Påstand 2: Hvis det finnes en $n \times n$ -matrise C , slik at $CA = CB$, så må $A = B$. Dette er *ikke sant*. Hvis vi lar C være $n \times n$ nullmatrisen, så vil $CA = [0] = CB$ uansett hva A og B er.

Påstand 3: Hvis $A^2 = B^2$, så er $A = \pm B$. Dette er *ikke sant*. Vi får et moteksempel hvis vi lar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da vil

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B^2,$$

selv om $A \neq \pm B$.

Påstand 4: $(AB)^T = B^T A^T$. Vi har vist at resten av påstandene ikke er sanne, så det er rimelig å gå ut fra at denne påstanden er *sann*. Men la oss for ordens skyld prøve å bevise det. Vi lar A_{ij} være elementet i rad i og kolonne j i matrisen A , og tilsvarende for matrisen B . Når vi transponerer matrisen, vil rader og kolonner skifte plass, så $A_{ij}^T = A_{ji}$. Vi kan skrive elementet i rad i , kolonne j i matrisen AB som

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

(Det kan være greit å prøve å overbevise seg selv om at dette stemmer ved å for eksempel regne ut produktet og summen for to 2×2 -matriser.)

Tilsvarende kan elementet i rad i , kolonne j i $(AB)^T$ skrives som

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki}.$$

Til slutt ser vi på matrisen $(B^T A^T)$:

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki}.$$

De to siste summene er like, som må bety at $(AB)^T = B^T A^T$.

Oppsummert så er det riktige svaret på oppgaven altså at $(AB)^T = B^T A^T$.

I Oppgave 7-10 lar vi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et ligningssystem, der A er en $n \times n$ -matrise over \mathbb{R} , og der $n > 2$. Vi skal avgjøre om de gitte påstandene er sanne eller usanne.

Oppgave 7 Påstanden er at systemet alltid har minst én løsning. Dette er *usant*. Et moteksempel er systemet med tilhørende totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Her gir rad 2 og rad 3 oss at $x_2 = 1$ og $x_2 = 2$, som ikke kan stemme. Systemet har dermed ingen løsning.

Oppgave 8 Påstanden er at dersom to kolonner i A er like, så har systemet ingen løsning. Dette er *usant*. Et moteksempel er systemet med tilhørende totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right].$$

Dette systemet har uendelig mange løsninger.

Oppgave 9 Påstanden er at dersom to kolonner i A er like, så har systemet uendelig mange løsninger. Dette er *usant*. Et moteksempel er systemet med tilhørende totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Dette systemet har ingen løsning, da de to siste radene gir at $x_3 = 1$ og $x_3 = 2$.

Oppgave 10 Påstanden er at dersom alle kolonnene i A er forskjellige, så har systemet minst én løsning. Dette er *usant*. Et moteksempel er systemet med tilhørende totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Dette systemet har ingen løsning, da de to siste radene gir at $x_2 = 1$ og $x_2 = 2$.

I Oppgave 11-12 lar vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 11 Vi finner egenverdiene til A ved å løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$. Vi har at

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -4 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 1) \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Dermed ser vi at egenverdiene er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = -2$.

Oppgave 12 Vi skal finne en matrise P , slik at $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise. En slik matrise vil ha kolonner bestående av lineært uavhengige egenvektorer til A . Vi finner egenvektorer tilhørende hver egenverdi ved å løse ligningen $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, for hver λ . Ved å løse denne ligningen finner vi at en egenvektor tilhørende $\lambda_1 = 1$ er

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

en egenvektor tilhørende $\lambda_2 = 2$ er av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

og en egenvektor tilhørende $\lambda_3 = -2$ er

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En passende matrise er dermed

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alternativt går det an å regne ut $P^{-1}AP$ for hvert alternativ, og sjekke om resultatet blir en diagonalmatrise. Denne må da nødvendigvis ha $1, 2, -2$ langs diagonalen.

Oppgave 13

I denne oppgaven er $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en lineærtransformasjon som speiler en vektor om yz -planet. Vi ønsker å finne egenverdiene til T , altså alle λ slik at $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Vi gjør det ved å først finne standardmatrisen til lineærtransformasjonen. Merk at å speile en vektor om yz -planet, er essensielt det samme som å skifte fortegn på x -koordinaten. Dermed får vi

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen er dermed

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

og egenverdiene er røttene til $\det(\lambda I - [T]) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Egenverdiene er altså 1 og -1 .

Oppgave 14 Vi lar

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, a \neq b.$$

Vi ønsker å avgjøre for hvilke verdier av a og b matrisen A er diagonaliserbar. Matrisen A er diagonaliserbar hvis A har tre lineært uavhengige egenvektorer. Vi finner først egenverdiene ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet $\det(\lambda I - A)$. Vi har at

$$\det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b \end{bmatrix} \right) = (\lambda - b)^2(\lambda - a).$$

Altså har A egenverdiene $\lambda_1 = a$ med algebraisk multiplisitet 1 og $\lambda_2 = b$ med algebraisk multiplisitet 2. Vi finner så egenvektorene, ved å løse ligningen $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for hver λ . Vi starter med $\lambda_1 = a$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi har én fri variabel, $x_1 = s, s \in \mathbb{R}$, og vi har at $x_2 = x_3 = 0$. Så ligningen har løsning

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R},$$

og en egenvektor tilhørende $\lambda_1 = a$ er dermed

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For $\lambda_2 = b$ får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b-a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

som gir to frie variabler $x_2 = t, x_3 = s$ der $s, t \in \mathbb{R}$ og $x_1 = s \frac{1}{b-a}$. Så ligningen har løsning

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og egenvektorer tilhørende $\lambda_2 = b$ er dermed

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De tre egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige for alle verdier av a og b . Dermed er riktig svar at A er diagonaliserbar for alle verdier av a og b .

Oppgave 15 Vi lar A og B være 2×2 -matriser som begge har egenverdi $\lambda = 3$. Spørsmålet er hva egenverdiene til AB er, og riktig svar er at *vi kan ikke vite noe om egenverdiene til AB* . For å illustrere dette, la først

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Da har både A og B egenverdi 3 (og -3). Men nå vil

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix},$$

og vi ser at det karakteristiske polynomet er

$$\det(\lambda I - AB) = \det \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = (\lambda - 10)(\lambda - 9) - 9 = \lambda^2 - 19\lambda - 9,$$

som har røtter $\lambda = \frac{19 \pm \sqrt{37}}{2}$. Hvis vi gjør en liten endring og sier at

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

så vil A og B fortsatt ha egenverdier 3 og -3 , men nå vil

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix},$$

som har egenverdier $\lambda = 10 \pm \sqrt{19}$.

Oppgave 16 Påstanden er at ingen matriser kan ha egenverdi 0. Dette er *usant*. Et moteksempel er f.eks. nullmatrisen, som vil ha 0 som eneste egenverdi.

Oppgave 17 Påstanden er at ingen 3×3 -matriser har fire forskjellige egenverdier. Dette er *sant*. Når vi regner ut egenverdiene til en 3×3 -matrise finner vi røttene til et tredjegradspolynom. Et slikt polynom kan maksimalt ha tre røtter, og dermed også maksimalt tre forskjellige egenverdier.

Oppgave 18 I denne oppgaven er A en 3×3 -matrise, og \mathbf{x} og \mathbf{y} er vektorer i \mathbb{R}^3 . Påstanden er at hvis $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ og $A\mathbf{y} = 2\mathbf{y}$, så er \mathbf{x} og \mathbf{y} lineært uavhengige. Dette er *sant*. Vi ser at \mathbf{x} og \mathbf{y} må være egenvektorer tilhørende hhv. egenverdiene 3 og 2, og egenvektorer som hører til distinkte egenverdier vil alltid være lineært uavhengige. La oss for ordens skyld bevise dette. For å vise at \mathbf{x} og \mathbf{y} er lineært uavhengige, lar vi $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$ og viser at da må $a = b = 0$. Vi har at

$$\mathbf{0} = A\mathbf{0} = A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA\mathbf{x} + bA\mathbf{y} = 3a\mathbf{x} + 2b\mathbf{y}.$$

Vi multipliserer ligningen $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$ med 3, og får

$$3a\mathbf{x} + 3b\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Nå har vi to uttrykk som er lik $\mathbf{0}$. Vi trekker det ene fra det andre:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = 3a\mathbf{x} + 3b\mathbf{y} - (3a\mathbf{x} + 2b\mathbf{y}) = b\mathbf{y}.$$

Siden \mathbf{y} er egenvektor, og dermed ulik nullvektoren, må vi ha at $b = 0$. Innsatt i $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$, får vi at også $a = 0$. Dermed er \mathbf{x} og \mathbf{y} lineært uavhengige.

Oppgave 19 I denne oppgaven er A en reell 3×3 -matrise. Påstanden er at hvis det finnes en basis for \mathbb{R}^3 bestående av egenvektorer for A , så har A tre forskjellige egenverdier. Dette er *usant*. Vi har et moteksempel hvis A er identitetsmatrisen,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da har A én egenverdi, $\lambda = 1$, med algebraisk multiplisitet 3. Men $\lambda = 1$ har tre tilhørende egenvektorer,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og disse egenvektorene utgjør en basis for \mathbb{R}^3 .

Oppgave 20 I denne oppgaven er A en reell 3×3 -matrise. Påstanden er at hvis det finnes en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, slik at $A\mathbf{x} = (1+i)\mathbf{x}$, så må det finnes en vektor \mathbf{y} slik at $A\mathbf{y} = (1-i)\mathbf{y}$. Dette er *sant*. Vi ser at $1+i$ må være en egenverdi med tilhørende egenvektor \mathbf{x} . Vi vet at eventuelle komplekse egenverdier kommer i konjugatpar, siden matrisen er reell (fordi vi finner røttene til et polynom med reelle koeffisienter). Det betyr at også $1-i$ må være en egenverdi, og da finnes det en tilhørende egenvektor \mathbf{y} , det vil si en vektor \mathbf{y} slik at $A\mathbf{y} = (1-i)\mathbf{y}$.

I Oppgave 21-23 skal vi undersøke om de oppgitte mengdene er vektorrom. Vi gjør det ved å undersøke om de er underrom av de oppgitte vektorrommene (\mathbb{R}^3 i Oppgave 21-22 og \mathcal{P}_2 i Oppgave 23). Vi må sjekke tre ting:

1. Er $\mathbf{0}$ med i mengden?
2. Lukket under addisjon?
3. Lukket under skalarmultiplikasjon?

Oppgave 21 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

I nullvektoren vil $x = y = 0$, som ikke tilfredsstiller kravet om at $x \neq y$. Dermed er ikke nullvektoren med i V , og V er dermed ikke et vektorrom.

Oppgave 22 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = yz \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Vi ser at for eksempel vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er med i mengden V , fordi $1 = 1 \cdot 1$. Men

$$2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ikke med, fordi $2 \neq 2 \cdot 2$. Mengden er altså ikke lukket under skalarmultiplikasjon og er dermed ikke et vektorrom.

Oppgave 23 La $V = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid p(1) = 0\} \subseteq \mathcal{P}_2$.

1. Nullvektoren i \mathcal{P}_2 er polynomet som er konstant lik 0. Hvis $p(x) = 0$, så vil $p(1) = 0$. Så nullvektoren ligger i mengden V .
2. La $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ og $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ være to polynomer som ligger i mengden V . Da vil $p_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 = 0$ og $p_2(1) = a_2 + b_2 + c_2 = 0$. La nå $q(x) = p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$. Da vil $q(1) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0$. Så V er lukket under addisjon.
3. La $p(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynom som ligger i V . La $q(x) = k \cdot p(x)$ for en skalar k . Da har vi at $q(1) = k \cdot p(1) = k \cdot (a + b + c) = k \cdot 0 = 0$. Så V er lukket under skalarmultiplikasjon.

Alle de tre punktene er tilfredsstillt, så V er et underrom av \mathcal{P}_2 og dermed et vektorrom.

I Oppgave 24-27 skal vi undersøke om de oppgitte funksjonene er lineærtransformasjoner. For at en funksjon $T : V \rightarrow W$, der V og W er to vektorrom, skal være en lineærtransformasjon, er det to kriterier som må være oppfylt:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u} \in V$ og alle skalarer k .

Oppgave 24 La $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= T \left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix} \\ &= T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) + T \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

og at

$$T \left(k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky + kz \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix} = k \cdot T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right).$$

Begge kravene er oppfylt, og T er dermed en lineærtransformasjon.

Oppgave 25 La $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(y+1) \end{bmatrix}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) &= T \left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ (x_1 + x_2)(y_1 + y_2 + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1y_1 + x_1y_2 + x_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

men

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 y_1 + x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2 y_2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 y_1 + x_1 + x_2 y_2 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er ikke addisjon bevart, og T er *ikke* en lineærtransformasjon.

Oppgave 26 La $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ være gitt ved $T(p(x)) = x \cdot p'(x)$. Vi ser at $T(p_1(x) + p_2(x)) = x \cdot (p_1(x) + p_2(x))' = x \cdot p_1'(x) + x \cdot p_2'(x) = T(p_1(x)) + T(p_2(x))$, og at

$$T(k \cdot p(x)) = x \cdot (kp(x))' = k \cdot (x \cdot p'(x)) = k \cdot T(p(x)).$$

Begge kravene er oppfylt, og T er dermed en lineærtransformasjon.

Oppgave 27 La $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved $T(\mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}$, der $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi har at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2))\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{v} \\ &= T(\mathbf{w}_1) + T(\mathbf{w}_2), \end{aligned}$$

og at

$$T(k \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot (k\mathbf{w}))\mathbf{v} = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} = k \cdot T(\mathbf{w}).$$

Begge kravene er oppfylt, og T er dermed en lineærtransformasjon.

Oppgave 28 Påstanden er at ethvert endeligdimensjonalt vektorrom har en basis. Dette er *sant*. La oss argumentere litt for hvorfor det er sant. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da finnes det per definisjon en endelig mengde med vektorer som utspenner V . La oss kalle denne mengden S . Hvis S i tillegg er lineært uavhengig er S per definisjon en basis for V . Men hva hvis S ikke er lineært uavhengig? Da finnes det en vektor $\mathbf{v} \in S$ som er en lineærkombinasjon av de andre vektorene i S . La oss lage en ny mengde $S_1 = S \setminus \{\mathbf{v}\}$, altså S uten \mathbf{v} . Siden \mathbf{v} er en lineærkombinasjon av vektorene i S_1 , vil vektorene i S_1 utspenne det samme som vektorene i S , altså hele V . Hvis S_1 også er lineært avhengig, kan vi fjerne enda en vektor som er en lineærkombinasjon av de andre, og slik kan vi fortsette helt til vi står igjen med en mengde som utspenner V , og er lineært uavhengig. Denne mengden vil da per definisjon være en basis for V .

Oppgave 29 Påstanden er at alle injektive lineærtransformasjoner $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har en invers. Dette er *sant*. I Kapittel 8 i forelesningsnotatene lærte vi at dersom T er injektiv, så vil kolonnene i standardmatrisen til T være lineært uavhengige. Men at kolonnene er lineært uavhengige betyr at matrisen er inverterbar. Dermed vil T ha en invers.

Oppgave 30 La $\mathcal{P}_2 = \{a+bx+cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Påstanden er at alle injektive lineærtransformasjoner $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ har en invers. Dette er *sant*. Legg merke til at en basis for \mathcal{P}_2 er $(1, x, x^2)$, mens en basis for \mathbb{R}^3 er

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Det betyr at \mathbb{R}^3 og \mathcal{P}_2 har samme dimensjon, nemlig 3. Vi har et nyttig resultat som sier at $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Siden T er injektiv er kjernen bare av nullvektoren, og dermed er $\dim(\ker T) = 0$. Dermed er $\dim(\operatorname{im} T) = \dim \mathcal{P}_2$. Det følger at T er surjektiv. Siden T er både injektiv og surjektiv, altså en isomorfi, så vil T være inverterbar.

I Oppgave 31 og 32 ser vi på datasettet som består av punktene $(-1, 0)$, $(0, 1)$ og $(2, 2)$.

Oppgave 31 I denne oppgaven skal vi avgjøre hvilken rett linje $y = cx + d$ som passer best til punktene. Hvis det fantes en rett linje gjennom alle punktene, kunne vi funnet $c, d \in \mathbb{R}$ slik at

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siden det ikke finnes en rett linje gjennom alle punktene, er det beste vi kan gjøre å finne en linje som minimerer avstanden til alle punktene. Det gjør vi ved å bruke minste kvadraters metode på

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer så totalmatrisen til ligningssystemet $(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9/14 \\ 0 & 1 & 11/14 \end{array} \right].$$

Linjen er altså $y = \frac{9}{14}x + \frac{11}{14}$.

Oppgave 32 Vi ønsker å finne et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$, som går gjennom alle punktene. Det betyr at vi må løse ligningssystemet

$$\begin{cases} a - b + c = 0 = p(-1) \\ c = 1 = p(0) \\ 4a + 2b + c = 2 = p(2) \end{cases}$$

Vi radreduserer totalmatrisen til systemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Polynomet er altså $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$.

I Oppgave 33 og 34 lar vi $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ være gitt ved $T(p(x)) = x^2 p''(x)$, og vi lar $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ være en basis for \mathcal{P}_2 .

Oppgave 33 Vi ønsker å finne $[T]_{\mathcal{B}}$, altså standardmatrisen til T i med hensyn til basisen \mathcal{B} . La $\mathbf{b}_1 = 1$, $\mathbf{b}_2 = x$ og $\mathbf{b}_3 = x^2$ være basisvektorene. Kolonnene i $[T]_{\mathcal{B}}$ er koordinatvektorene til $T(\mathbf{b}_1)$, $T(\mathbf{b}_2)$ og $T(\mathbf{b}_3)$ med hensyn til \mathcal{B} . Vi må altså sjekke hva T gjør med hver av basisvektorene:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = 0, \quad T(x^2) = 2x^2.$$

Med andre ord har vi at

$$T(\mathbf{b}_1) = 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3,$$

$$T(\mathbf{b}_2) = 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3,$$

$$T(\mathbf{b}_3) = 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 2 \cdot \mathbf{b}_3.$$

Koordinatvektorene er dermed

$$[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som betyr at standardmatrisen er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 34 Vi finner egenverdiene til T ved å løse ligningen $\det(\lambda I - [T]_{\mathcal{B}}) = 0$. Vi har at

$$\det(\lambda I - [T]_{\mathcal{B}}) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2(\lambda - 2).$$

Egenverdiene er altså 0 og 2.

Oppgave 35 Vi ønsker å finne ut hvilket alternativ som gir en regulær stokastisk matrise. Husk at en stokastisk matrise er en matrise hvor alle kolonnene er sannsynlighetsvektorer, som vil si at alle elementene er ikke-negative og hver kolonne summerer til 1. Videre er en stokastisk matrise M regulær dersom det finnes en $k \geq 1$ slik at alle elementene i M^k er større enn 0. Vi ser at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

er stokastisk, fordi alle kolonnesummene er 1, og alle elementene er ikke-negative. Videre observerer vi at

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.18 & 0.06 \\ 0.54 & 0.58 & 0.34 \\ 0.24 & 0.24 & 0.60 \end{bmatrix},$$

så matrisen er også regulær. Riktig alternativ er altså

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 36 La en løsning av $y'' - 3y' + 2y = 0$ være slik at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$. Vi ønsker å finne $y(1)$. Hvis vi lar $v_1 = y$ og $v_2 = y'$, kan vi skrive om ligningen til systemet

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}', \text{ med } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finner først egenverdiene til A ved å løse

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Polynomet har røttene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$. Det betyr at en generell løsning er $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$. Videre får vi at $y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t$. Setter vi inn initialverdiene gir oss ligningssystemet

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= 2c_1 + c_2 = 1, \end{aligned}$$

som har løsning $c_1 = 0$ og $c_2 = 1$. Dermed har vi at

$$y(t) = e^t \text{ og } y(1) = e = 2.718\dots$$

Oppgave 37 Vi lar \mathbf{y} være en løsnings av settet av differensialligninger gitt ved

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ der } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

En generell løsning vil være på formen

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t},$$

der λ -ene er egenverdier til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

og \mathbf{v} -ene er tilhørende egenvektorer. Vi ser at egenverdiene til matrisen er 1, 2 og 5, så e^{3x} kan ikke være en av y_1, y_2, y_3 siden 3 ikke er en egenverdi. Riktig svar er altså e^{3x} .

Oppgave 38 Vi vil finne polarform av løsningene til ligningen $z^2 + z + 1 = 0$. Den gode gamle *abc*-formelen gir at

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$$

så på kartesisk form ($z = a + bi$) har vi løsningene

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{og} \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vi ønsker å ha løsningene på polarform $z = re^{i\theta}$, med $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, og $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$. Merk at vi legger π til θ fordi a er negativ i begge løsningene. For z_1 får vi dermed

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{og} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Altså er

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Tilsvarende får vi for z_2 at

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{og} \quad \theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Altså er

$$z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Polarform av løsningene til $z^2 + z + 1 = 0$ er dermed

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad \text{og} \quad e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Oppgave 39 Vi vil finne antall komplekse løsninger til ligningen $z^2 + i\bar{z} = 0$. La $z = a + bi$. Dermed er $\bar{z} = a - bi$, og vi får $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ og $i\bar{z} = b + ai$. Det betyr at vi kan skrive om ligningen vår litt:

$$\begin{aligned} z^2 + i\bar{z} &= 0 \\ z^2 &= -i\bar{z} \\ a^2 - b^2 + 2abi &= -b - ai \end{aligned}$$

Hvis to komplekse tall er like, så er realdelene like og imaginærdelene like. Det betyr at

$$a^2 - b^2 = -b \quad \text{og} \quad 2abi = -ai.$$

Andre ligning gir

$$2abi + ai = 0 \implies ai(2b + 1) = 0 \implies a = 0 \text{ eller } b = -\frac{1}{2}.$$

Dersom $a = 0$ gir første ligning at

$$-b^2 = -b \implies b - b^2 = 0 \implies b(1 - b) = 0 \implies b = 0 \text{ eller } b = 1.$$

Dersom $b = -\frac{1}{2}$, gir første ligning at

$$a^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \implies a^2 = \frac{3}{4} \implies a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Oppsummert har vi følgende muligheter for a og b :

$$\begin{aligned} a = 0, b = 0 \\ a = 0, b = 1 \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ligningen $z^2 + i\bar{z} = 0$ har altså nøyaktig fire løsninger.

Oppgave 40 La A betegne affogato, la St betegne stracciatella og la Se betegne semifreddo. Vi oppsummerer informasjonen i en tabell hvor vi skriver ned hvor sannsynlig overgangen fra én is til en annen er hver dag:

<i>dagen etter</i>	A	St	Se	<i>ble det</i>
	1/2	0	1/3	A
	1/4	1/2	1/3	St
	1/4	1/2	1/3	Se .

Dette gir oss overgangsmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Likevektsvektoren er en egenvektor tilhørende egenverdi $\lambda = 1$, som vi finner ved å løse ligningssystemet $(I - M)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi radreducerer totalmatrisen til systemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & -1/3 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 1 & -2 & 4/3 & 0 \\ 1 & 2 & -8/3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Vi får én fri variabel $x_3 = s$, og $x_2 = x_3 = s$ og $x_1 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}s$. Løsningene på ligningssystemet er dermed gitt ved

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Likevektsvektoren skal være en sannsynlighetsvektor, så elementene må være positive og summere til 1. Det får vi ved å sette $s = \frac{1}{1+1+2/3}$. Da får vi likevektsvektor

$$\mathbf{q} = \frac{1}{1 + 1 + 2/3} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at i det lange løp så endte Skyberg opp med å spise stracciatella og semifreddo like ofte, og litt mindre affogato.