NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a] 40840468 , [b] 90849783 , [c] 47301607

Eksamensdato: 07. desember 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ y + 2z &= 3, \\ -x + z &= 4. \end{aligned}$$

b) For hvert reelt tall t, la

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For alle verdier av t: Beskriv kolonnerommet og nullrommet til A_t.

Oppgave 2

Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$.

a) Vis at egenverdiene til A er reelle. Hvorfor er A diagonaliserbar for alle verdier av r_1, r_2 og z? Hva kalles en slik matrise A?

b) La $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ og $z = 1 + i$. Finn egenverdiene og egenrommene til A. Finn en matrise P, slik at $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise.

Oppgave 4

Studentene i Matematikk 3 liker å tilbringe helgene sine på Studentersamfundet, men trenger i blant en dag hjemme for å lade batteriene. En rask håndsopprekning i forelesning tyder på at samtlige foretrekker enten fart og spenning på dansegulvet på Bodegaen eller kake og brettspill på Edgar når de først tar turen ut. Oppmerksome forelesere noterer seg følgende trend:

- Dersom en student har vert på Bodegaen en helg, så er det 50 % sannsynlighet for at han trenger den påfølgende helgen hjemme på sofaen, og det er bare 10 % sjanse for å møte studenten igjen på dansegulvet helgen etterpå. Ellers er det jo hyggelig med litt kake.
- Dersom en student tilbrakte helgen hjemme, så er det en femtedel sjanse for at studenten også er hjemme den påfølgende helgen, mens det er like stor sjanse for at han velger Bodegaen som Edgar, dersom han går ut.
- Dersom en student var på Edgar en helg, så er det 40 % sjanse for å se studenten igjen på Edgar helgen etterpå også. Ettersom den forrige helgen ikke var så utmattende, er det 35% sjanse for at studenten velger å vise sine kunster på dansegulvet. Noen føler derimot for å ta en rolig helg hjemme - kanskje Rosenborg spiller sen bortekamp på TVen?

Første helgen av semesteret dropper Studentersamfundet inngangspenger og samtlige studenter tilbringer selvfølgelig lørdagen sin der, jevnt fordelt på Edgar og Bodegaen. Hvordan ser fordelingen ut blant studentene siste helgen før eksamen?

Oppgave 5

La $V = P_2(\mathbb{R})$, dvs. V er vektorrommet av alle polynomer av grad 2 eller mindre med reelle koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

a) Oppgi definisjonen av et reelt indreprodukt. Vis at funksjonen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på V.

b) Vi vet at $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ er en basis for V. Bruk denne basisen til å finne en *ortogonal* basis $\mathcal{B}'$ for V. La $r(x) = x^2 - 1$, og finn $[r(x)]_{\mathcal{B}'}$, altså koordinatene til $r(x) = x^2 - 1$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}'$.

c) La $T\colon V \to V$ være funksjonen $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$, der $p'(x)$ er den deriverte av $p(x)$ med hensyn på x. Vis at dette er en lineærtransformasjon. Finn en matrise A, slik at $A[p(x)]_{\mathcal{B}} = [T(p(x))]_{\mathcal{B}}$.

d) Finn en lineærtransformasjon $S\colon V \to V$ som er inversen til T, altså en lineærtransformasjon slik at begge sammensetningene $S \circ T$ og $T \circ S$ er identitetsavbildningen på V.