Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3 - Løsningsforslag**

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a] mobil Aslak , [b] mobil Morten , [c] mobil Tjerand

Eksamensdato: 07. desember 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 8

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Legger vi sammen første og tredje ligning, får vi ligningen

$$y + z = 6.$$

Dersom vi trekker denne fra den midterste ligningen, ser vi at $z = -3$. Vi kan videre beregne $x = z - 4 = -7$, og $y = 2 - x = 9$.

b) Vi beregner

$$\det A_t = 1 + 2t.$$

Så lenge $t \neq -1/2$ er matrisen inverterbar, slik at nullrommet er kun nullvektoren, og kolonnerommet er hele $\mathbb{R}^3$. For $t = -1/2$ må nullrommet og kolonnerommet beregnes. Vi radreduserer matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser av pivotelementene i den radreduserte matrisen at kolonnerommet til $A_{-1/2}$ er utspent av de to første kolonnene, altså at

$$\mathrm{Col}\, A_{-1/2} = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siden kolonnerommet er todimensjonalt, vet vi at nullrommet er endimensjonalt, og dersom vi observerer at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ser vi at

$$\mathrm{Null}\, A_{-1/2} = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Oppgave 2 Vi finner først homogen løsning. Karakteristisk ligning er

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

som gir $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$. Homogen løsning er

$$y_h(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t.$$

Siden det inhomogene leddet er en homogen løsning, er det ikke innlysende hva partikulærløsningen er. Vi bruker formelen

$$\begin{aligned} y_p(t) &= y_2 \int^t \frac{y_1(s) f(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)}\, ds - y_1 \int^t \frac{y_2(s) f(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)}\, ds \\ &= e^t \int^t \frac{e^{2s} e^{2s}}{e^{2s} e^s - 2e^{2s} e^s}\, ds - e^{2t} \int^t \frac{e^s e^{2s}}{e^{2s} e^s - 2e^{2s} e^s}\, ds \\ &= -e^t \int^t \frac{e^{4s}}{e^{3s}}\, ds + e^{2t} \int^t \frac{e^{3s}}{e^{3s}}\, ds = -e^t \int^t e^s\, ds + e^{2t} \int^t ds = te^{2t} - e^{2t}. \end{aligned}$$

Innsetting viser at den første av disse leddene er korrekt partikulærløsning, mens det andre leddet er en homogen løsning vi kan se bort fra. Generell løsning er

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + te^{2t}.$$

Vi bruker til slutt initialkravene. Dette gir ligningene

$$1 = y(0) = c_1 + c_2$$

og

$$1 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 1,$$

som løses av $c_1 = -1$ og $c_2 = 2$. Løsningen blir altså

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^t + te^{2t}.$$

Oppgave 3

a) La $z = a + bi$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Først regner vi ut egenverdiene λ til A:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_2) &= (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) - z\bar{z} \\ &= \lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2 - (a^2 + b^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dette gir oss:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 r_2 - a^2 - b^2)}}{2} \\ &= \frac{(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)}}{2}.\end{aligned}$$

Her ser vi at både $(r_1 - r_2)^2$ og $4(a^2 + b^2)$ er posititve tall, som gjør at uttrykket under rottegnet er et posivt tall. Dette betyr at både λ_1 og λ_2 vil være reelle tall. Altså har vi alltid reelle egenverdier for en slik matrise.

Dersom $r_1 = r_2$ og $z = 0$ ser vi at uttrykket under rottegnet blir lik 0. Da får vi en dobbel egenverdi $\lambda = r_1$, og det følger direkte at A er en diagonalmatrise. For hvilke som helst andre verdier av r_1, r_2 og z ser vi at uttrykket under rottegnet er større enn 0, og vi får dermed to ulike egenverdier

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)}}{2}, \text{ og} \\ \lambda_2 &= \frac{(r_1 + r_2) - \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)}}{2}.\end{aligned}$$

Da vet vi fra tidligere i faget at λ_1 og λ_2 har egenvektorer, henholdsvis $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, som spenner ut forskjellige egenrom. Dersom vi setter $P = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2]$ (merk at P er invertibel fordi kolonnevektorene er lineært uavhengige) og D som diagonalmatrisen med λ_1 og λ_2 langs diagonalen, så vet vi fra forelesningene om diagonalisering at vi kan skrive $A = PDP^{-1}$. Vi konkluderer med at A alltid vil være diagonaliserbar.

I faget definerte vi den adjungerte til A som matrisen A som er transponert og komplekskonjugert. Dette skrev vi som $A^* = \bar{A}^T$. Vi sa at en kompleks matrise som er lik sin adjungerte, altså at $A = A^*$, kalles en Hermitsk matrise. Vi sa også at en slik matrise alltid vil ha reelle egenverdier, og alltid være diagonaliserbar. Vi ser at matrisen A som er oppgitt i denne oppgaven er en Hermitsk matrise fordi elementene langs diagonalen er relle, og de to andre elementene er de komplekskonjugerte av hverandre.

b) La $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ og $z = 1 + i$. Da får vi følgende egenverdier:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{(r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)}}{2}, \\
&= \frac{(3 + 2) + \sqrt{(3 - 2)^2 + 4(1^2 + 1^2)}}{2}, \\
&= \frac{5 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \text{ og} \\
\lambda_2 &= \frac{5 - 3}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Videre setter vi inn λ_1 og λ_2 i ligningen $(A - \lambda I_2)\vec{v} = \vec{0}$ for å finne A sine egenvektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 + i \\ 1 - i & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 + i \\ 1 - i & -2 \end{bmatrix}.$$

Dersom vi setter $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$ så vil vektorproduktet av første rad i $A - \lambda_1 I_2$ med $\vec{v}_1$ bli

$$(-1)(1 + i) + (1 + i)(1) = 0.$$

Hva med andre rad? Da får vi

$$(1 - i)(1 + i) + (-2)(1) = 2 - 2 = 0$$

Så gjør vi det samme med λ_2 for å finne $\vec{v}_2$.

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 + i \\ 1 - i & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 + i \\ 1 - i & 1 \end{bmatrix}.$$

Dersom vi setter $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 + i \\ -2 \end{bmatrix}$ så vil vektorproduktet av første rad i $A - \lambda_2 I_2$ med $\vec{v}_2$ bli

$$2(1 + i) + (1 + i)(-2) = 0$$

Hva med andre rad? Da får vi

$$(1 - i)(1 + i) + 1(-2) = 2 - 2 = 0$$

Det følger at $\mathrm{Sp}\{\vec{v}_1\}$ er egenrommet til λ_1 og $\mathrm{Sp}\{\vec{v}_2\}$ er egenrommet til λ_2. Dersom vi setter $P = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2]$ (merk at P er invertibel fordi kolonnevektorene er lineært uavhengige) så vil $P^{-1}AP$ bli diagonalmatrisen D som har λ_1 og λ_2 langs diagonalen.

Oppgave 4 Vi setter opp en tabell med sannsynlighetene som beskriver situasjonen:

bytter fra	B	H	E	**til**
	0.10	0.40	0.35	B
	0.50	0.20	0.25	H
	0.40	0.40	0.40	E

Dette kan vi skrive som en matrise

$$M = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.40 & 0.35 \\ 0.50 & 0.20 & 0.25 \\ 0.40 & 0.40 & 0.40 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at dette er en regulær stokastisk matrise fordi alle kolonnene summerer til 1 og alle elementene er positive. Da vet vi at denne matrisen har en unik likevektsvektor $\vec{q}$ slik at $M\vec{q} = \vec{q}$ og at fordelingen av studenter vil konvergere mot denne fordelingen uansett startfordeling. Vi må dermed finne en stokastisk vektor $\vec{q}$ som hører til egenverdien $\lambda = 1$ for matrisen M. Vi regner ut

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.40 & 0.35 \\ 0.50 & 0.20 & 0.25 \\ 0.40 & 0.40 & 0.40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.90 & 0.40 & 0.35 \\ 0.50 & -0.80 & 0.25 \\ 0.40 & 0.40 & -0.60 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 2.5 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -12 & 8.5 \\ 1 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 10 \\ 1 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10/13 \\ 1 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10/13 \\ 1 & 0 & -19/26 \end{bmatrix}$$

Nå kan vi finne en egenvektor $\vec{v}$. La oss sette siste koordinat i $\vec{v}$ til å være 1. Da følger det at

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 19/26 \\ 10/13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Derimot er dette ikke en stokastisk vektor, da summen av koordinatene i $\vec{v}$ er $5/2$. Da skalerer vi på følgende vis:

$$\vec{q} = \frac{2}{5}\vec{v} = \begin{bmatrix} 19/65 \\ 4/13 \\ 2/5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.292 \\ 0.308 \\ 0.400 \end{bmatrix}.$$

Da er $\vec{q}$ en likevektsvektor til M, og etter lang tid så vil fordelingen av studenter fordele seg slik. Et semester fullt av festeligheter er ganske lang tid (ihvertfall føles det slik), og da forventer fagstaben å møte ca. 29.2% av studentene på Bodegaen og ca. 40 % av studentene på Edgar den siste helgen før eksamen, mens de resterende 30.8 % av studentene sitter hjemme og jobber med Markovkjeder.

Oppgave 5

a) Et indreprodukt på et reelt vektorrom V er en funksjon $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ som oppfyller følgende:

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, og
- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ and $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Vi har

$$\begin{aligned}\langle p(x), q(x) \rangle &= \int_0^1 p(x)q(x)\ dx \\ &= \int_0^1 q(x)p(x)\ dx \\ &= \langle q(x), p(x) \rangle\end{aligned}$$

Videre

$$\begin{aligned}\langle p(x), aq(x) + br(x) \rangle &= \int_0^1 p(x)(aq(x) + br(x))dx \\ &= \int_0^1 ap(x)q(x) + bp(x)r(x)\ dx \\ &= \int_0^1 ap(x)q(x)\ dx + \int_0^1 bp(x)r(x)\ dx \\ &= a\int_0^1 p(x)q(x)\ dx + b\int_0^1 p(x)r(x)\ dx \\ &= a\langle p(x), q(x) \rangle + b\langle p(x), r(x) \rangle\end{aligned}$$

og

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_0^1 (p(x))^2\ dx \geq 0$$

siden $p(x)^2 \geq 0$ på hele intervallet $[0, 1]$. Tilslutt: hvis $\int_0^1 (p(x))^2\ dx = 0$, må $p(x) = 0$ på hele intervallet $[0, 1]$

b) La $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (1, x, x^2)$ Vi benytter Gram-Schmidt og lar $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, vi lar $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1$ og vil lar

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3)\\ &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2\end{aligned}$$

Vi beregner

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$$

og

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1\ dx = 1$$

så vi får $\mathbf{u}_2 = x - \frac{1}{2}$. Videre:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$$

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle (x - \frac{1}{2}), x^2 \rangle = \int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2\ dx = \frac{1}{12}$$

og

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle (x - \frac{1}{2}), (x - \frac{1}{2}) \rangle = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\ dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

så vi får $\mathbf{u}_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Vi har nå at $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6})$ er en ortogonal basis for V med hensyn på det oppgitte indreproduktet.

Så må vi finne koordinatene til $r(x)$. Vi ønsker å finne reelle tall a, b, c slik at $x^2 - 1 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = a + b(x - \frac{1}{2}) + c(x^2 - x + \frac{1}{6})$. Vi finner disse ved å løse ligningssystemet med utvidet matrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Ved radreduksjon finner vi at $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1$ og $c = 1$ er den unike løsningen. Altså er $[r(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Vi trenger vise at $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V og at $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u}$ i V og reelle tall c.

La $\mathbf{u} = p(x)$ og $\mathbf{v} = q(x)$ være vilkårlige polynomer i V. Da er

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= p(x)+q(x)+(p(x)+q(x))' \\ &= p(x)+q(x)+p'(x)+q'(x) \\ &= p(x)+p'(x)+q(x)+q'(x) \\ &= T(p(x))+T(q(x)). \end{aligned}$$

Videre er $T(cp(x)) = cp(x) + (cp(x))' = cp(x) + cp'(x) = cT(p(x))$. Vi har dermed vist at T er en lineærtransformasjon. Vi bruker T på de tre basisvektorene i $\mathcal{B}$ og får

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 \\ T(x^2) &= x^2+2x \end{aligned}$$

Matrisen A må derfor ha egenskapene:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Dermed følger det at

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

d) Vi vil finne en lineærtransformasjon $S\colon V \to V$ slik at begge sammensetningene $S \circ T$ og $T \circ S$ er identitetsavbildningen på V.

Vi må da ha at $[S(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Vi beregner A^{-1} ved hjelp av radreduksjon og får:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Altså er $S(1) = 1$, $S(x) = -1 + x$ og $S(x^2) = 2 - 2x + x^2$.

Dermed er $S(a + bx + cx^2) = a + b(-1 + x) + c(2 - 2x + x^2)$.

Altså $S(a + bx + cx^2) = (a - b + 2c) + (b - 2c)x + cx^2$.

Dette kan også skrives som $S(p(x)) = p(x) - p'(x) + p''(x)$.