Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a] 40840468 , [b] 90849783 , [c] 47301607

Eksamensdato: 07. desember 2019

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Spesifiserte trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillate.

Annan informasjon:
Eksamen består av ti deloppgåver. Alle deloppgåvene tel likt. Alle svara skal grunngjevast. I år spesifiserar me at INGEN trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillate.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Løys likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ y + 2z &= 3, \\ -x + z &= 4. \end{aligned}$$

b) For kvart reelt tall t, la

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For alle verdiar av t: Beskriv kolonnerommet og nullrommet til A_t.

Oppgåve 2

Finn løysinga til initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Oppgåve 3

La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være ei 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$.

a) Vis at eigenverdiane til A er reelle. Kvifor er A diagonaliserbar for alle verdiar av r_1, r_2 og z? Kva kallar vi ei slik matrise A?

b) La $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ og $z = 1 + i$. Finn eigenverdiane og eigenromma til A. Finn ei matrise P, slik at $P^{-1}AP$ er ei diagonalmatrise.

Oppgåve 4

Studentane i matematikk 3 likar å opphalde seg på Studentersamfundet i helgane, men treng nokre gonger ein dag heime for å lade batteria. Ei rask handsopprekking i ei førelesing tyder på at alle føretrekk anten fart og spenning på dansegolvet på Bodegaen eller kake og brettspel på Edgar når dei fyrst tek turen ut. Merksame førelesarar legg merke til følgjande trend:

- Viss ein student var ei helg på Bodegaen er det 50 % sannsyn for at han tek helga etter heime på sofaen, og det er berre 10 % sjanse for å møte studenten på dansegolvet att helga etter. Elles er det ålreit å få seg ein kakebit.
- Viss ein student var heime ei helg et det ein femdels sjanse for at studenten òg er heime neste helg, medan det er like stor sjanse for at han vel Bodegaen som Edgar, dersom han vel å gå ut.
- Viss ein student var på Edgar ei helg er det 40 % sjanse for å sjå han der att helga etter. Sidan førre helg ikkje var så utmattande er det 35 % sannsyn for at han syner kunstene sine på dansegolvet. Nokre føler heller for å ta ei roleg helg heime - kanskje Rosenborg spelar ein sein bortekamp på TV?

Fyrste helga i semesteret droppar Studentersamfundet inngangspengar, og samtlege studentar brukar sjølvsagt laurdagen sin der. Dei er jamnt fordelt på Edgar og Bodegaen. Korleis ser fordelinga ut hjå studentane siste helga før eksamen?

Oppgåve 5

La $V = P_2(\mathbb{R})$, dvs. V er vektorrommet av alle polynom av grad 2 eller mindre med reelle koeffisientar. La $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

a) Oppgi definisjonen av eit reelt indreprodukt. Vis at funksjonen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er eit indreprodukt på V.

b) Me veit at $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ er ein basis for V. Bruk denne basisen til å finne ein *ortogonal* basis $\mathcal{B}'$ for V. La $r(x) = x^2 - 1$, og finn $[r(x)]_{\mathcal{B}'}$, altså koordinatane til $r(x) = x^2 - 1$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}'$.

c) La $T\colon V \to V$ være funksjonen $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$, der $p'(x)$ er den deriverte av $p(x)$ med hensyn på x. Vis at dette er ein lineærtransformasjon. Finn ei matrise A, slik at $A[p(x)]_{\mathcal{B}} = [T(p(x))]_{\mathcal{B}}$.

d) Finn ein lineærtransformasjon $S\colon V \to V$ som er inversen til T, altså ein lineærtransformasjon slik at begge samansetningane $S \circ T$ og $T \circ S$ er identitetsavbildinga på V.