NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Calculus 3**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Szymik

Tlf: 411 16 793

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C, "Matematisk Formelsamling" av Karl Rottman er tillatt, og følgende enkle kalkulatorer er tillatt: Casio fx-82ES PLUS og Casio fx-82EX, Citizen SR-270X og Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 (Komplekse tall)

a) Finn alle løsninger $z \in \mathbb{C}$ av ligningen

$$z^3 + z^2 + z = -1$$

Skisser løsningene (lag en tegning) i det komplekse planet. Skriv dem på formen $z = a + \mathrm{i}b$ hvor a og b er reelle, og på formen $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ hvor r og t er reelle.

b) Skriv ned Eulers formel for $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ med $t \in \mathbb{R}$.

c) En **addisjonsformel** for en funksjon f er en formel som uttrykker $f(x+y)$ ved $f(x)$ og $f(y)$. Skriv ned en addisjonsformel for den komplekse eksponentialfunksjonen $f(z) = \mathrm{e}^z$.

d) La $z = a + \mathrm{i}b$ være et komplekst tall. Finn reelle tall p og q slik at z tilfredsstiller ligningene $z^2 + pz + q = 0$ og $\overline{z}^2 + p\overline{z} + q = 0$.

Oppgave 2 (Lineære ligningssystem)

a) Finn alle løsninger av ligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 63 \\ 51 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

b) Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og den korresponderende ligningen $Ax = y$. For hvilke verdier av p er $x \in \mathbb{R}^p$? For hvilke verdier av q er $y \in \mathbb{R}^q$? Gi en basis for rommet

$$\{\, x \in \mathbb{R}^p \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^q \,\}$$

av løsninger til den homogene ligningen.

Oppgave 3 (Utspenning, lineær uavhengighet, basis, dimensjon)

a) Betrakt vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 99 \\ 100 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. Vis at de utspenner $\mathbb{R}^2$. Er de lineært uavhengig? Begrunn svaret ditt!

b) Betrakt vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 99 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^{99}$. Er de lineært uavhengige? Hva er dimensjonen til vektorenes lineære utspenn? Begrunn svarene dine!

c) Fullfør følgende definisjon: "Vektorene $v_1, \ldots, v_n$ i et vektorrom V danner en **basis** til V dersom..."

Oppgave 4 (Matrisealgebra)

Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlige reelle tall; du kan ikke velge spesifikke verdier!

a) Regn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c?

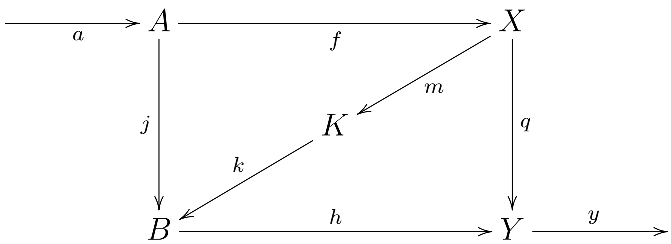
c) Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z?

Oppgave 5 (Et nettverk og en markovprosess)

a) Hva er det lineære ligningssystemet som beskriver flyten i følgende nettverk?



b) Kan du utlede en relasjon mellom a og y? Begrunn!

Ifølge meteorolog Y_r eksisterer det et land N som er velsignet med mange ting, men ikke med solrikt vær. Det er aldri to dager med sol på rad. Dersom det er sol en dag, er det like stor sannsynlighet for at det regner som at det snør påfølgende dag. Dersom det er snø eller regn en dag, er det like stor sannsynlighet for å få det samme været - som å ikke få det samme været - påfølgende dag. Dersom det er en endring fra snø eller regn fra en dag til den neste, er det bare i halvparten av gangene sol påfølgende dag.

c) Hva er den stokastiske matrisen for denne markovkjeden?

d) På lang sikt, hvor mange dager - av alle (i %) - er det sol?

Oppgave 6 (Egenverdier og egenvektorer)

a) La P være en kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at egenverdiene til P kun kan være 0 eller 1.

b) Gi et eksempel på en $(2,2)$–matrise P slik at $P^2 = P$ og som har egenverdier 0 **og** 1.

c) Gi et eksempel på en $(2,2)$–matrise P som har egenverdier 0 eller 1 eller begge, og som **ikke** tilfredsstiller $P^2 = P$.

Oppgave 7 (Andreordens lineære differensialligninger)

a) La y_0, y_1, p og q være gitte reelle tall, og $f(t)$ en funksjon som er en million ganger deriverbar. Finnes det **alltid** en funksjon $y(t)$ som løser den inhomogene ligningen

$$y'' + py' + qy = f$$

med initialverdier $y(0) = y_0$ og $y'(0) = y_1$? Dersom det gjør det, gi en kort begrunnelse. Dersom det ikke gjør det, gi et eksempel på y_0, y_1, p, q og $f(t)$ der det ikke er noen løsning.

b) La

$$y(t) = t\sin(t).$$

Finn reelle tall p og q, og en reell funksjon $f(t)$, slik at y tilfredsstiller ligningen $y'' + py' + qy = f$. Du kan sjekke om svaret ditt er riktig: gjør det!

c) For p og q som i **b)**, gi et fundamentalt system av løsninger til den homogene ligningen $y'' + py' + qy = 0$.

Oppgave 8 (System av lineære differensialligninger)

La λ og μ være gitte reelle tall hvor $\lambda \neq \mu \neq 0$, og betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for rommet av løsninger $y(t)$ til den homogene ligningen

$$y' = Ay.$$

b) Finn en løsning til den homogene ligningen $y' = Ay$ som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$y'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 9 (Minste kvadraters metode)

a) Finn koeffisientene a, b og c til det kvadratiske polynomet $f(z) = az^2 + bz + c$ som gir best tilpasning til følgende fem datapunkter.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Gi et eksempel på en matrise A slik at minste kvadraters 'løsning' av ligningen $Ax = y$ **ikke** er unik/entydig? Begrunn påstandene dine!

c) For en matrise A, la $A^\top$ betegne dens transponerte. Vis at $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^\top)$.

Oppgave 10 (Euklidsk geometri)

a) La $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den ortogonale projeksjonen på diagonalen

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}.$$

Hvilken matrise beskriver denne lineære transformasjonen?
Hva er egenverdiene og egenvektorene?
Sjekk at de numeriske svarene dine stemmer overens med geometrien!

b) La $b_1, \ldots, b_n$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$, og la $v = v_1 b_1 + \ldots v_n b_n$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Vis at

$$|\langle v,\, b_k \rangle| \leqslant \| v \|$$

for alle $k = 1, \ldots, n$, hvor $\langle v,\, w \rangle = v^\top w$ er indreproduktet.

c) Hva er en spektral-dekomposisjon til en symmetrisk matrise med reelle koeffisienter? Skriv ned en formel, og forklar!