Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Markus Szymik

Tlf: 411 16 793

Eksamensdato: 1. juni 2018

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C, "Matematisk Formelsamling" av Karl Rottman er tillaten, og følgande enkle kalkulatorar er tillatne: Casio fx-82ES PLUS og Casio fx-82EX, Citizen SR-270X og Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 10

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1 (Komplekse tall)

a) Finn alle løysingane $z \in \mathbb{C}$ av likninga

$$z^3 = \mathrm{i}.$$

Skisser løysingane (lag eit bilete) i det komplekse planet. Skriv dei på forma $z = a + \mathrm{i}b$ der a og b er reelle, og på forma $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ der r og t er reelle.

b) Skriv ned Euler sin formel for $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ med $t \in \mathbb{R}$.

c) Ein **addisjonsformel** for ein funksjon f er ein formel som uttrykker $f(x+y)$ ved $f(x)$ og $f(y)$. Skriv ned ein addisjonsformel for den komplekse eksponentialfunksjonen $f(z) = \mathrm{e}^z$.

d) La z vere eit komplekst tal, og la $\overline{z}$ vere den konjugerte av z.
Vis at $z + \overline{z}$ og $z \cdot \overline{z}$ er reelle tall.

Oppgåve 2 (Lineære likningssystem)

a) Finn alle løysingane av likninga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 12 & 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 15 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

b) For kva verdiar av $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ løyser vektorar på forma

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

likninga

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

Kva er dimensjonen på løysingsrommet?

Oppgåve 3 (Utspenning, lineær uavhengigheit, basis, dimensjon)

Betrakt fire vektorar:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

a) Er vektorane v_1, v_2, v_3 og v_4 lineært avhengige eller lineært uavhengige? Grunngi svaret ditt!

b) Kva er dimensjonen til det lineære utspennet av vektorane v_1, v_2, v_3 og v_4? Grunngi svaret ditt!

c) Skriv ned ein basis for vektorrommet utspent av vektorane v_1, v_2, v_3 og v_4. Grunngi svaret ditt!

Oppgåve 4 (Matrisealgebra)

Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlege reelle tal; du kan ikkje velje spesifikke verdiar!

a) Rekn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) Kva er den inverse til matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

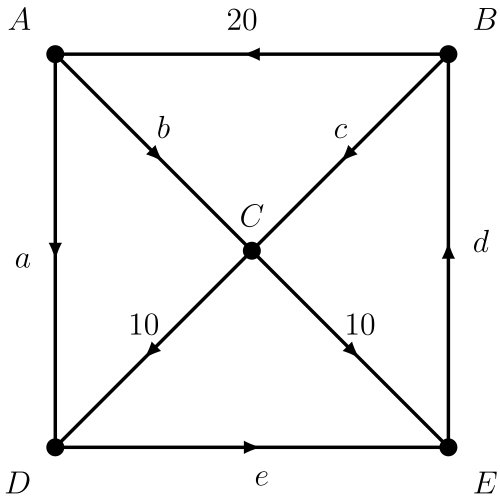
uttrykt ved a, b, c?

c) Kva er determinanten til matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Oppgåve 5 (Eit nettverk og ein markovprosess)

a) Kva for eit lineært likningssystem skildrar flyten i følgande nettverk?



b) Når Sonja et kveldsmat drikk ho vatn, kaffi, øl eller vin. Ho har berre ein type drikke til kvart kveldsmåltid. Ho har aldri alkoholhaldig drikke til to påfølgande kveldsmåltid, men dersom ho har øl eller vin ein kveld, er sannsynet for kaffi dobbelt så stor som for vatn neste dag. Dersom ho har vatn eller kaffi ein kveld, har ho alkoholhaldig drikke neste kveld og sannsynet for øl og vin er like store.

Kva er den stokastiske matrisa for denne markovkjeda?

Oppgåve 6 (Eigenverdiar og eigenvektorar)

a) Fullfør utsagnet til en definisjon: "Et tall λ er ein **eigenverdi** til ei kvadratisk (square) matrise A dersom..."

b) Finn ei matrise A slik at

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er ein eigenvektor til A med eigenverdi 2, og

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er ein eigenvektor til A med eigenverdi 3.

Oppgåve 7 (Andreordens lineære differensiallikningar)

Anta at s er ein vilkårleg reell konstant. Du kan ikkje velje ein spesifikk verdi.

a) Finn koeffisientar $p, q \in \mathbb{R}$ slik at den andreordens lineære differensiallikninga

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

har løysing y_s gitt ved

$$y_s(t) = \cos(s + t).$$

b) Kva er initialkrava for løysinga y_s ved tida $t = 0$ (uttrykt ved s)?

c) Skriv $y_s(t)$ som ein lineærkombinasjon av $\cos(t)$ og $\sin(t)$ (med koeffisientane avhengige av s).

Oppgåve 8 **(System av lineære differensiallikningar)**

Betrakt det lineære systemet

$$x'(t) = x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = y(t) + x(t)$$

av førsteordens differensiallikningar. Gitt $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, betrakt initialverdiane

$$x(0) = x_0$$
$$y(0) = y_0.$$

a) Finn løysinga av det gitte systemet med gitte initialverdiar.

b) Sjekk at løysinga du har funne tilfredsstiller alle fire likningane.

Oppgåve 9 (Minste kvadrats metode)

Betrakt dei fire datapunkta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

i 3–rommet, der t er ein reell parameter.

a) Skriv ned likningane

$$A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = b$$

som hadde vore tilfredsstilte dersom funksjonen $z = px + qy + r$ gjekk gjennom dei fire datapunkta. Skriv ned A og b eksplisitt!

b) Kan du velje t slik at likningane i **a)** har ei løysing? Grunngi svaret ditt!

c) Anta at parameteren t er gitt slik at likningane i **a)** ikkje har ei løysing. Forklar kva ei **minste kvadrats "løysing"** er. (Du blir ikkje spurd om å faktisk finne den!)

Oppgåve 10 (Euklidsk geometri)

a) La

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

slik at $u_j = 1$ for alle $j = 1, \dots, n$.

Kva er den euklidske lengda, norma $\|u\|$, av vektoren u?

b) La u vere gitt som i **a)** og la

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Finn koordinatane til den ortogonale projeksjonen av vektoren v på linja utspent av u.

c) La $w \neq 0$ vere ein vektor ulik null i $\mathbb{R}^n$, og la $H = \text{Span}\{w\}^\perp$ vere mengda av vektorar som er ortogonale på w. Gi ein formel for den ortogonale projeksjonen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ på H.