NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Szymik

Tlf: 411 16 793

Eksamensdato: 1. juni 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C, "Matematisk Formelsamling" av Karl Rottman er tillatt, og følgende enkle kalkulatorer er tillatt: Casio fx-82ES PLUS og Casio fx-82EX, Citizen SR-270X og Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 (Komplekse tall)

a) Finn alle løsninger $z \in \mathbb{C}$ av ligningen

$$z^3 = \mathrm{i}.$$

Skisser løsningene (lag et bilde) i det komplekse planet. Skriv dem på formen $z = a + \mathrm{i}b$ hvor a og b er reelle, og på formen $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ hvor r og t er reelle.

b) Skriv ned Eulers formel for $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ med $t \in \mathbb{R}$.

c) En **addisjonsformel** for en funksjon f er en formel som uttrykker $f(x+y)$ ved $f(x)$ og $f(y)$. Skriv ned en addisjonsformel for den komplekse eksponentialfunksjonen $f(z) = \mathrm{e}^z$.

d) La z være et komplekst tall, og la $\overline{z}$ betegne dens konjugerte.
Vis at $z + \overline{z}$ og $z \cdot \overline{z}$ er reelle tall.

Oppgave 2 (Lineære ligningssystem)

a) Finn alle løsninger av ligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 12 & 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 15 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

b) For hvilke verdier av $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ løser vektorer på formen

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

ligningen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

Hva er dimensjonen på løsningsrommet?

Oppgave 3 **(Utspenning, lineær uavhengighet, basis, dimensjon)**

Betrakt fire vektorer:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

a) Er vektorene v_1, v_2, v_3 og v_4 lineært avhengige eller lineært uavhengige? Begrunn svaret ditt!

b) Hva er dimensjonen til det lineære utspennet av vektorene v_1, v_2, v_3 og v_4? Begrunn svaret ditt!

c) Skriv ned en basis for vektorrommet utspent av vektorene v_1, v_2, v_3 og v_4. Begrunn svaret ditt!

Oppgave 4 (Matrisealgebra)

Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlige reelle tall; du kan ikke velge spesifikke verdier!

a) Beregn matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

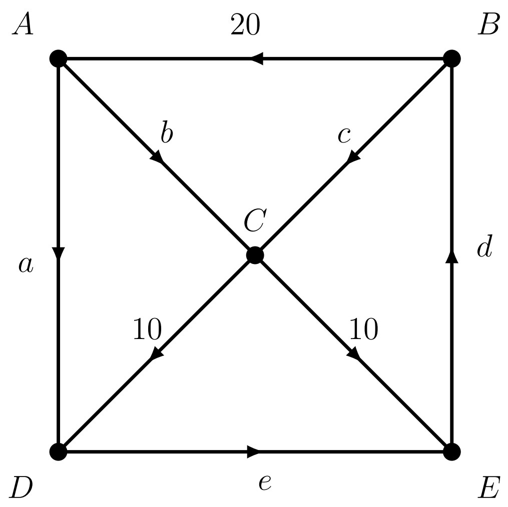
uttrykt ved a, b, c?

c) Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Oppgave 5 (Et nettverk og en markovprosess)

a) Hvilket lineært ligningssystem beskriver flyten i følgende nettverk?



b) Når Sonja spiser kveldsmat drikker hun vann, kaffe, øl eller vin. Hun har bare en type drikke til hvert kveldsmåltid. Hun har aldri alkoholholdig drikke til to påfølgende kveldsmåltid, men dersom hun har øl eller vin en kveld, er sannsynligheten for kaffe dobbelt så stor som for vann neste dag. Dersom hun har vann eller kaffe en kveld, har hun alkoholholdig drikke neste kveld og sannsynligheten for øl og vin er like store.

Hva er den stokastiske matrisen for denne markovkjeden?

Oppgave 6 (Egenverdier og egenvektorer)

a) Fullfør utsagnet til en definisjon: "Et tall λ er en **egenverdi** til en kvadratisk (square) matrise A dersom..."

b) Finn en matrise A slik at

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egeneverdi 2, og

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 3.

Oppgave 7 (Andreordens lineære differensialligninger)

Anta at s er en vilkårlig reell konstant. Du kan ikke velge en spesifikk verdi.

a) Finn koeffisienter $p, q \in \mathbb{R}$ slik at den andreordens lineære differensialligningen

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

har løsning y_s gitt ved

$$y_s(t) = \cos(s + t).$$

b) Hva er initialbetingelsene for løsningen y_s ved tiden $t = 0$ (uttrykt ved s)?

c) Skriv $y_s(t)$ som en lineærkombinasjon av $\cos(t)$ og $\sin(t)$ (med koeffisientene avhengig av s).

Oppgave 8 (System av lineære differensialligninger)

Betrakt det lineære systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) + x(t) \end{aligned}$$

av førsteordens differensialligninger. Gitt $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, betrakt initialverdiene

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

a) Finn løsningen av det gitte systemet med gitte initialverdier.

b) Sjekk at løsningen du har funnet tilfredsstiller alle fire ligningene.

Oppgave 9 (Minste kvadraters metode)

Betrakt de fire datapunktene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

i 3–rommet, hvor t er en reell parameter.

a) Skriv ned ligningene

$$A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = b$$

som ville vært tilfredsstilt dersom funksjonen $z = px + qy + r$ gikk gjennom de fire datapunktene. Skriv ned A og b eksplisitt!

b) Kan du velge t slik at ligningene i **a)** har en løsning? Begrunn svaret ditt!

c) Anta at parameteren t er gitt slik at ligningene i **a)** ikke har en løsning. Forklar hva en **minste kvadraters "løsning"** er. (Du blir ikke spurt om å faktisk finne den!)

Oppgave 10 (Euklidsk geometri)

a) La

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

slik at $u_j = 1$ for alle $j = 1, \dots, n$.
Hva er den euklidske lengden, normen $\|u\|$, av vektoren u?

b) La u være gitt som i **a)** og la

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Finn koordinatene til den ortogonale projeksjonen av vektoren v på linjen utspent av u.

c) La $w \neq 0$ være en vektor forskjellig fra null i $\mathbb{R}^n$, og la $H = \operatorname{Span}\{w\}^\perp$ være mengden av vektorer som er ortogonale på w. Gi en formel for den ortogonale projeksjonen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ på H.