Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I SIF5009 MATEMATIKK 3

Bokmål

Mandag 3. desember 2001

Oppgave 1

a) Karakteristisk polynom er $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, med røtter $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Generell løsning :

$$y = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \tag{1}$$

b) Som partikulær løsning prøver vi med $y_p = Ce^{-t}$, som innsatt i likningen gir

$$Ce^{-t} + 2Ce^{-t} + 2Ce^{-t} = e^{-t}$$

altså $C = 1/5$. Generell løsning :

$$y = y_h + y_p = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{1}{5}e^{-t} \tag{2}$$

Initialbetingelsen gir $C_1 = -1/5, C_2 = 2/5$,og derfor løsningen

$$y = \frac{1}{5}e^t(-\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}e^{-t} \tag{3}$$

c) På normalform er likningen

$$x' + \frac{1}{t^2}x = \frac{1}{t^2}$$

som har integrerende faktor $M(t) = e^{\int t^{-2}dt} = e^{-1/t}$. Derfor

$$(e^{-1/t}\ x)' = t^{-2}e^{-1/t}$$

og integrasjon av begge sider gir

$$e^{-1/t}\ x = \int t^{-2}e^{-1/t}dt = e^{-1/t} + C$$

og derav generell løsning (gyldig for $t \neq 0$)

$$x(t) = 1 + Ce^{1/t}$$

som med initialbetingelsen $x(1) = 1 + e$ gir $C = 1$, altså løsningen

$$x(t) = 1 + e^{1/t} \tag{4}$$

d) Tilhørende homogen likning har karakteristisk polynom $(\lambda - 3)^2 = 0$, altså $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, derav generell løsning

$$y_h = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$$

Vi søker en partikulær løsning av type

$$y_p = e^{3t} u_1 + t e^{3t} u_2$$

ved metoden "variasjon av parametre" , hvor u_1'og u_2' er løsningen av et lineært likningssystem, som etter kansellering av faktoren e^{3t} blir

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-3} \end{bmatrix}$$

Det gir

$$\begin{aligned} u_2' &= t^{-3} \implies u_2 = -\frac{1}{2t^2}; \quad u_1' = -t^{-2} \implies u_1 = \frac{1}{t} \\ y_p &= \frac{1}{t} e^{3t} - \frac{t}{2t^2} e^{3t} = \frac{1}{2t} e^{3t} \end{aligned}$$

og generell løsning

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + \frac{1}{2t} e^{3t} \tag{5}$$

Oppgave 2

Likningen kan skrives

$$z^5 = 2^5(-\sqrt{3} + i) = 2^5 e^{i\theta}, \quad \text{hvor} \quad \theta = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ$$

Det gir løsningene

$$z_k = 2e^{i(5\pi/6+2k\pi)/5}, \quad k = 0,1,2,3,4 \tag{6}$$

Merk at

$$z_0 = 2e^{i\pi/6},\ z_1 = z_0\omega,\ z_2 = z_0\omega^2\ ,\ z_3 = z_0\omega^3\ ,\ \ z_4 = z_0\omega^4$$

hvor $\omega = e^{2\pi i/5}$ oppfyller $\omega^5 = 1$. Tallene z_i ligger på sirkelen med radius 2 omring origo, danner en regulær 5-kant, og i første kvadrant ligger hjørnet $z_0 = \sqrt{3} + i$.

Oppgave 3

Ved elementære radoperasjoner får en for eksempel :

$$\begin{aligned} A \;=\; & \begin{bmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \sim\; & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{red} \end{aligned} \tag{7}$$

hvor siste matrise er på *redusert* trappeform (og derfor entydig bestemt av A).

Den nest siste matrise er en trappematrise som ikke er redusert, men som også kan benyttes i resten av oppgaven. Vi får løsningene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7r - 9s \\ -3r + 3s \\ r \\ s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

b) Løsningsrommet er $Null(A) = Row(A)^{\perp}$, som er 2-dimensjonalt, med basis som vist ovenfor.

Siden trappematrisen har to rader som ikke er identisk lik 0, er også $\dim Row(A) = \dim Col(A) = 2$. Alternativt kan en si at $\dim Row(A) = 4 - \dim Row(A)^{\perp} = 2$.

De to første radene til trappematrisen er en basis for $Row(A)$. Første og andre kolonne i trappematrisen er pivot -kolonner (dvs. har en *ledende* koeffisient), slik at de to første kolonnene til A er en basis for $Col(A)$.

Bemerkning For vår matrise A ser en lett at ingen kolonne (resp. rad) er et multiplum av en annen kolonne (resp. rad) slik at et hvilket som helst utvalg av to kolonner (resp. rader) fra A er en basis for det 2-dimensjonale rommet $Col(A)$ (resp. $Row(A)$).

c) La $\mathbf{c}_1, .., \mathbf{c}_4$ være kolonnevektorene til A. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrives som

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 = \mathbf{b}, \tag{9}$$

og følgelig har likningen en løsning $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$, dvs. $\mathbf{b}$ tilhører $Col(A)$.

For den gitte vektor $\mathbf{b} = [-1, 2, 1, 0]^T$ har likningsystemet **ingen løsning.** For eksempel kan en vise at $\mathbf{b}$ ikke er en lineær kombinasjon av to (vilkårlig valgte) kolonner til A, siden disse kolonner vil utspenne $Col(A)$.

Alternativt kan en starte med den utvidede koeffisientmatrise $[A, \mathbf{b}]$ og transformere denne til trappeform . Med radoperasjonene brukt i a) får en:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

hvor $*$ betyr tall $\neq 0$. Likningsystemet er derfor inkonsistent.

Oppgave 4

a) Karakteristisk polynom :

$$\det \begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 \\ 12 & 13-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 25)(\lambda - 1) = 0$$

Egenvektorer med valg av tilhørende (normaliserte) egenvektorer :

$$\lambda_1 = 25 \;\longleftrightarrow\; \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \;\longleftrightarrow\; \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

b) Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonal , og

$$P^T AP \; = D = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Med dette valget av egenvektorer er også $\det(P) = 1$, og P er en rotasjonsmatrise med rotasjonsvinkel $\theta = \pi/4$ $(= 45^\circ)$.

Generell løsning av differensiallikningsystemet er

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{25t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{25t} - C_2 e^t \\ C_1 e^{25t} + C_2 e^t \end{bmatrix} \tag{12}$$

c) Innfører et nytt koordinatsystem, med koordinater (x', y') hvor positiv x'-akse peker i retningen til $\mathbf{v}_1$ og positiv y'-akse har retningen til $\mathbf{v}_{2.}$ Koordinatsystemet oppnås altså ved å rotere xy-aksesystemet 45° i positiv omdreiingsretning.

Sammenhengen mellom gamle og nye koordinater :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \; = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix}$$

som ved innsetting gir :

$$13x^2 + 24xy + 13y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 25x'^2 + y'^2 + 2y'$$

Ny likning for kjeglesnittet :

$$x'^2 + \frac{1}{25}(y' + 1)^2 = 1 \tag{13}$$

Dette er en ellipse med halvakser 1 og 5, og med sentrum i $(x', y') = (0, -1)$.

Til slutt kan en også translatere koordinatsystemet (med samme akse-retninger) slik at sentrum blir det nye origo, som gir enklest mulig form

$$(x'')^2 + \frac{1}{25}(y'')^2 = 1$$

hvor $x'' = x'$ og $y'' = y' + 1$. Men dette siste punkt er uvesentlig hvis tegningen ellers viser plasseringen av kjeglesnittet og x'- og y'-aksene i xy-planet.

Oppgave 5

Ortogonaliseringsalgoritmen gir

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{12}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 22 \\ -19 \\ -31 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} =$ *Span* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = V$ og $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en ortogonal basis for V. Merk at lengden til $\mathbf{u}_i$ er uvensentlig i denne oppgave; spesielt er det naturlig å sløyfe faktoren $1/10$ til $\mathbf{u}_3$ ovenfor i det endelige svar.

Oppgave 6

Vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ oppfattes som kolonnevektorer, dvs. $1 \times n$-matriser. Siden en ortogonal matrise P oppfyller $P^T P = I$, har vi når indre produktet (= prikkproduktet) mellom vektorer uttrykkes som produkt av matriser :

$$P\mathbf{x} \cdot P\mathbf{y} = \mathbf{x}^T P^T P\mathbf{y} = \mathbf{x}^T I\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \tag{14}$$

Settes $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ får en på samme måte

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|P\mathbf{x}\|^2, \quad \|\mathbf{y}\|^2 = \|P\mathbf{y}\|^2$$

og spesielt gjelder implikasjonene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{y}\| = 1 \implies \|P\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{y}\| = 1 \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 0 \quad \implies \quad P\mathbf{x}\cdot P\mathbf{y} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

og det var dette som skulle vises.