Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5009/10 MATEMATIKK 3
14. august 2000

Oppgave 1

Anta $x > 0$ og divider med x. En integrende faktor er $e^{\int(-3/x)dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$, og vi får

$$x^{-3}y = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$$

dvs. $y = x^3 \ln x + cx^3$. Fra $y(1) = 0$ fås $c = 0$, og $\underline{\underline{y = x^3 \ln x,\ x > 0.}}$

Oppgave 2

a) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a = 0$ gir for $a = 1$, $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, og for $a = -1$, $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Fra $y_p = Ax + B$ fås $y_p = a^{-1}x$, så generell løsning er

$$\begin{aligned} &y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \text{ for } a = 1, \\ &\underline{\underline{y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x \text{ for } a = -1.}} \end{aligned}$$

b) Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ har $\lambda = -1$ som dobbelrot, så $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. For y_p får vi for

$$\begin{aligned} b \neq -1 &: y_p = Ae^{bx}, \text{ som innsatt gir } A = \frac{1}{(b+1)^2}, \\ b = -1 &: y_p = Ax^2 e^{-x}, \text{ som innsatt gir } A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Generell løsning er da

$$\begin{aligned} &y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{e^{bx}}{(b+1)^2} \text{ for } b \neq -1, \\ &\underline{\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \text{ for } b = -1.}} \end{aligned}$$

c) Fra b) har vi $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ der $y_1 = e^{-x}$ og $y_2 = xe^{-x}$. For å finne y_p bruker vi variasjon av konstantene, dvs. y_p har formen $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ der u_1 og u_2 oppfyller

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= \sqrt{x}e^{-x}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} u_1' + xu_2' &= 0 \\ -u_1' + (1-x)u_2' &= \sqrt{x}, \end{aligned}$$

og $u_2 = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $u_1 = -\int x^{3/2}dx = -\frac{2}{5}x^{5/2}$.

Innsatt i y_p gir dette generell løsning

$$\underline{\underline{y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{4}{15}x^{5/2}e^{-x}.}}$$

Oppgave 3

Vi bringer først A-delen av $[A|\mathbf{b}]$ på echelonform ved hjelp av radoperasjoner. Det gir

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & \alpha & 3\beta \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 5 & 2\beta \\ 1 & -2 & 5 & -4 & -1 & \beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2-2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 4-3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\beta-7 \end{array}\right].$$

a) Vi ser at for

$$\begin{aligned} &\alpha \neq 7 : \dim \mathrm{Col}(A) = 3, \dim \mathrm{Null}(A) = 2 \\ &\underline{\underline{\alpha = 7 : \dim \mathrm{Col}(A) = 2, \dim \mathrm{Null}(A) = 3.}} \end{aligned}$$

b) Vi ser at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsbart hvis og bare hvis $\underline{\underline{\beta = 1 \text{ og } \alpha \neq 7}}$. Med $\beta = 1$ og $\alpha = 6$ løses $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved hjelp av tilbakesubstitusjon i echelonformen, og vi får løsningene

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; s,\, t \in \mathbb{R}.}}$$

Oppgave 4

a) Gram-Schmidt gir

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Videre får vi

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_V \mathbf{b} &= \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 + \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\right)\mathbf{u}_3 \\ &= \frac{6}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da er $V = \operatorname{Row}(A)$, og derfor er $U = \operatorname{Row}(A)^{\perp} = \operatorname{Null}(A)$. En basis for $\operatorname{Null}(A)$ fås ved å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ dvs. } \mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R}.$$

En basis for U er da $(1, 1, -1, -1, 0)$, $(1, 0, -1, 0, -2)$.

Oppgave 5

a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 7-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) = 0$ gir $\underline{\underline{\lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = 7}}$.

Egenvektorer er for $\lambda_3 = 5$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \underline{\underline{\mathbf{v}_3 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ t \neq 0.}}$$

For $\lambda_4 = 7$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \underline{\underline{\mathbf{v}_4 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \neq 0.}}$$

b) Siden $\det A = \det(A - 0I) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 0$, eksisterer A^{-1}. Fra

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda A^{-1}x \Leftrightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

ser vi at egenverdiene til A^{-1} er 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ fra a).

Oppgave 6

Kjeglesnittligningen svarer til $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a$ der $\mathbf{x} = [x\ y]^T$ og

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

A har egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 5$ (fra $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$), og med nye koordinater $\tilde{\mathbf{x}}$ blir ligningen $2\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 = a$, eller

$$\frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{\frac{a}{2}})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{\frac{a}{5}})^2} = 1.$$

Vi ser at kjeglesnittet oppfyller kravet i oppgaven hvis og bare hvis $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{a}{5}}$ og $\sqrt{\frac{a}{2}} < 1$, dvs. $\underline{\underline{\frac{5}{4} < a < 2.}}$