Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSSKISSE TIL EKSAMEN I FAG SIF5010

10. august 2001

Oppgave 1

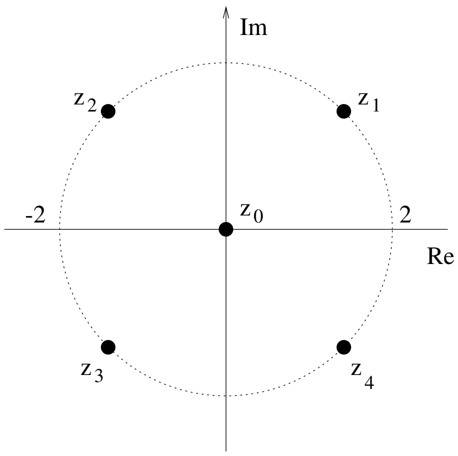
$$z^5 + 16z = z(z^4 + 16) = 0$$

dvs. at vi har en rot $z = 0$ og 4 røtter av

$$z^4 = -16 \;\Rightarrow\; r^4 e^{4i\theta} = -16 = e^{i\pi} \;\Rightarrow r = 2 \text{ og } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}, k = 0, 1, 2, 3$$

Vi får røttene

$$\begin{aligned}
z_0 &= \underline{\underline{0}} \\
z_1 &= 2e^{i\pi/4} &&= \underline{\underline{\sqrt{2}(1+i)}} \\
z_2 &= 2e^{i3\pi/4} &&= \underline{\underline{\sqrt{2}(-1+i)}} \\
z_3 &= 2e^{i5\pi/4} &&= \underline{\underline{\sqrt{2}(-1-i)}} \\
z_4 &= 2e^{i7\pi/4} &&= \underline{\underline{\sqrt{2}(1-i)}}
\end{aligned}$$



Oppgave 2

a) Integrerende faktor:

$$F(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

Multipliserer med $F(x)$ på begge sider av ligningen, slik at

$$(e^{-x^2}\, y)' = x\, e^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-x^2}\, y = \int x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Generell løsning blir

$$y(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

og setter vi inn initialverdien $y(1) = 0$ får vi at $C = 1/(2e)$, slik at

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - 1)}}$$

b) Eulers metode gir oss følgende formel:

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n + x_n)$$

der $y_n \approx y(x_n)$, og $x_n = x_0 + nh$. Med $y_0 = 0$ og $x_0 = 1$ og med $h = 1/4$ får vi

$$y(\frac{5}{4}) \approx y_1 = \frac{1}{4}, \qquad \underline{\underline{y(\frac{3}{2}) \approx y_2 = \frac{23}{32}}}$$

Oppgave 3

a)

Karakteristisk ligning:	$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
Homogen løsning:	$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$
Partikulærløsning:	$y_p = Ax^2 e^{2x}$

Setter partikulærløsningen inn i ligningen, og får $A = 3/2$. Generell løsning blir:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$$

Startverdiene gir

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 0 \\ y'(0) &= 2C_1 + C_2 = 1, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 \end{aligned}$$

og løsningen blir

$$\underline{\underline{y(x) = (x + \frac{3}{2}x^2)e^{2x}}}$$

.

b)

Karakteristisk ligning:	$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$
Homogen løsning:	$y_h = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$
Partikulærløsning:	$y_p = u_1 \sin(x) + u_2 \cos(x)$

der u_1 og u_2 må tilfredstille

$$\begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sin(x) \end{bmatrix}$$

Denne har løsningen

$$\begin{aligned} u_1' &= 1/\tan(x), \quad \Rightarrow \quad u_1 = \ln(\sin(x)) \\ u_2' &= -1, \quad \Rightarrow \quad u_2 = -x \end{aligned}$$

Generell løsning blir:

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x) - x\cos(x)}}$$

Oppgave 4
Systemet kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrisas karakteristiske ligning er

$$(-7 - \lambda)(-\lambda) + 12 = \lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda + 4)(\lambda + 3)$$

Egenverdiene blir altså $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$, og de tilhørende egenvektorene kan regnes ut:

$$\lambda_1 = -4 : \qquad \begin{matrix} -3v_1 + 2v_2 = 0 \\ -6v_1 + 4v_2 = 0 \end{matrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 : \qquad \begin{matrix} -4v_1 + 2v_2 = 0 \\ -6v_1 + 3v_2 = 0 \end{matrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Generell løsning blir

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

Setter vi inn initialverdiene ender vi med

$$\begin{array}{rcccl} x(0) & = & 2C_1 + C_2 & = & 1 \\ y(0) & = & 3C_1 + 2C_2 & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & -1 \end{array}$$

og løsningen blir

$$\underline{\underline{x(t) = 2e^{-4t} - e^{-3t}}} \qquad \underline{\underline{y(t) = 3e^{-4t} - 2e^{-3t}}}$$

Oppgave 5

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b)

$$\underline{\underline{\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\{(1,0,1),(0,1,1)\}}}$$
$$\underline{\underline{\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{(1,2,3),(1,0,-1)\}}}$$
$$\underline{\underline{\mathrm{Null}(A) = \mathrm{span}\{(-1,-1,1)\}}}$$

c) $\mathrm{Col}(A)$ er spent ut av de to vektorene $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$ og $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$. Vi bruker Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ 2/7 \\ -4/7 \end{bmatrix}$$

En ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$ er dermed gitt ved $\underline{\underline{(1,2,3) \text{ og } (4,1,-2)}}$ (vi har multiplisert den siste vektoren med $7/2$ får å få pene tall, men det er ikke noe krav.)

Hvis vi i stedet tar utganspunkt i $\mathbf{v}v_2$, blir resultatet $(1,0,-1)$, $(1,1,1)$.

Oppgave 6 Når $\det(A) \neq 0$ er A inverterbar. Vi kan vise $(*)$ ved å multiplisere med A^{-1} fra venstre på begge sider:

$$\overbrace{A^{-1}A}^{I}\,B = \overbrace{A^{-1}A}^{I}\,C \quad \Rightarrow \quad B = C$$

Vi velger en så enkel singulær matrise A som mulig, f.eks.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lar vi

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

vil

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}, \qquad AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} \end{bmatrix}$$

slik at $AB = AC$ hvis $b_{11} = c_{11}$ og $b_{12} = c_{12}$. Vi kan f.eks. velge

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 7

a)

$$|A - \lambda I| = (7-\lambda)(8-\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 10)(\lambda - 5) = 0$$

så egenverdier og egenvektorer er gitt ved

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 10}}, \qquad \begin{array}{rcrcl} -3v_1 & + & 2v_2 & = & 0 \\ 3v_1 & - & 2v_2 & = & 0 \end{array}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_2 = 5}}, \qquad \begin{array}{rcrcl} 2v_1 & + & 2v_2 & = & 0 \\ 3v_1 & + & 3v_2 & = & 0 \end{array}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

b) Vi lar x_n være antall gifte og y_n antall ugifte menn i år n (fra nå av). Vi får følgende formel, med $x_0 = 8000$ og $y_0 = 2000$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - 0,3x_n + 0,2y_n = 0,7x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} &= y_n + 0,3x_n - 0,2y_n = 0,3x_n + 0,8y_n \end{aligned}$$

eller på matriseform

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}^{B_n} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{slik at} \qquad \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $B = 1/10A$, dermed har B egenverdiene $1,0$ og $0,5$, og samme egenverdier som A. B er altså diagonaliserbar, dvs. $B = PDP^{-1}$, der P er egenvektormatrisa, dvs.

$$D = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi at

$$\lim_{n\to\infty} B^n = \lim_{n\to\infty} PD^nP^{-1} = P \cdot \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1,0^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6000 \end{bmatrix}.$$

På lang sikt vil det altså bli <u>4000 gifte og 6000 ugifte menn i byen</u>.

Oppgave 8 Hvis A er diagonaliserbar så fins en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ slik at $A = PDP^{-1}$. Men

$$A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^k = PD^kP^{-1} \quad \Rightarrow \quad D^k = P^{-1}A^kP.$$

Og da gjelder

$$A^k = O \quad \Rightarrow \quad D^k = \text{diag}\{d_1^k, d_2^k, \cdots, d_n^k\} = O \quad \Rightarrow \quad D = O \quad \Rightarrow \quad A = O.$$