Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag eksamen august 1998**

## Eksamen SIF5010, august 98

$\boxed{1}$ **a)** $2 + 2\sqrt{3}\,i = 4(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 4e^{i\pi/3} = (2e^{i\pi/6})^2$.

Røttene blir $\underline{\underline{\pm 2e^{i\pi/6}}} = \pm 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \underline{\underline{\pm(\sqrt{3} + i)}}$

**b)** Kan bruke formel eller regne direkte:

$z^2 + 2(1+i)z = 2 + 2(\sqrt{3} - 1)i$

$(z + (1+i))^2 = 2 + 2(\sqrt{3} - 1)i + (1+i)^2 = 2 + 2(\sqrt{3} - 1)i + 2i = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

Fra a) får vi
$$\begin{aligned} \underline{\underline{z_1}} &= -(1+i) + \sqrt{3} + i = \underline{\underline{\sqrt{3} - 1}} \\ \underline{\underline{z_2}} &= -(1+i) - \sqrt{3} - i = \underline{\underline{-(\sqrt{3}+1) - 2i}} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ **a)** Homogenløsning fra $r^2 + r - 2 = 0$, som gir $r_1 = 1, r_2 = -2$.

Ingen sammenheng med høyresiden, dvs. $y_p(x)$ er på formen $A + Bx + 2x^2$.

Innsatt: $4 + B + 4x - 2A - 2Bx - 4x^2 = -4x^2$, som gir $B = 2,\ A = 3$,

og dermed $\underline{\underline{y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + 3 + 2x + 2x^2}}$

**b)** Homogenløsning fra $r^2 - 2r + 1 = 0$, dvs $r = 1$ dobbel rot.

Partikulærløsning på formen $u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$.

Generell formel:
$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Her får vi
$$\begin{aligned} u_1'e^x + u_2'xe^x &= 0, \\ u_1'e^x + u_2'(1+x)e^x &= \frac{1}{x}e^x, \end{aligned}$$

som gir
$$\begin{aligned} u_1' + u_2'x &= 0, \\ u_1' + u_2'(1+x) &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

og dermed
$$\begin{aligned} u_2' &= 1/x,\ u_2 = \ln\,x,\ \text{og}\ u_1' = -1,\ u_1 = -x. \\ \underline{\underline{y(x)}} &= c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + x\ln\,xe^x \\ &= \underline{\underline{c_1e^x + c_2'xe^x + x\ln\,xe^x}} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)** Overføring til Echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis for $\mathrm{Row}(A)$ : $\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}.$

Basis for $\mathrm{Col}(A)$ (Kolonne 1 og 3 i den opprinnelige matrisen): $\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}.$

**b)** Homogent system på E-form:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Med $x_2 = t$ og $x_4 = s$ som frie variable får vi løsningen

$$\begin{aligned} x_4 &= s \\ x_3 &= -s \\ x_2 &= t \\ x_1 &= -3t - s. \end{aligned}$$

Dvs., generell løsning: $\begin{pmatrix} -3t - s \\ t \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \underline{\underline{t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}.$

Dette gir oss også basisvektorene for Null (A).

**c)** Det enkleste er å gjennomføre echelontransformasjonene på høyresiden:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b - 2a \\ c + a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b - 2a \\ c + a - 2(b - 2a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b - 2a \\ c + 5a - 2b \end{pmatrix}$$

Systemet blir selvmotsigende hvis $\underline{\underline{c \neq -5a + 2b}}$. (De to første ligningene er naturligvis løsbare uansett.)

$\boxed{4}$ **a)** Finner egenverdier og egenvektorer: $(9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = 0$, dvs. $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$.

$\lambda_1 = 25 :$ $\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$, dvs. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 0 :$ $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$, dvs. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Utgangspunktet er $\underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$ og $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

For at $P$ skal representere en rotasjon, må $|P| = 1$ og $P$ være ortogonal. Dermed må vi normalisere $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og snu $\mathbf{v}_2$: $\underline{\underline{P = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}}}$

**b)** Ligningen kan skrives $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + [-20\ 15]\mathbf{x} = 0$.

Vi ønsker oss et koordinatsystem som gir en diagonalmatrise i første uttrykk, dvs. vi setter $\mathbf{x}' = P^T\mathbf{x}$.

Da får vi

$(\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}' + [-20\ 15]P\mathbf{x}'$

$= 25x^{1^2} + \frac{1}{5}[-20\ 15]\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}' = 25(x^{1^2} + y') = 0.$

Dette er en $\underline{\underline{\text{parabel, } y' = -x^{1^2}.}}$

$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, og $P$ svarer til en rotasjon mot urviseren på $\theta =$ arctg $(4/3) \approx 53.1°$.

**c)** Vi gjenkjenner matrisen fra (a) og kan sette opp løsningen uten videre:

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}e^{25t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

$\boxed{5}$ Anta at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0$. Må vise at $c_1 = c_2 = \cdots c_k = 0$. Tar skalarproduktet med $\mathbf{v}_1$. Da blir ifølge forutsetningene $c_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 + 0 + 0 \cdots + 0 = 0$, eller $c_1|\mathbf{v}_1|^2 = 0$. Siden $\mathbf{v}_1 \neq 0$, må $c_1 = 0$. Tilsvarende for $c_2, \ldots, c_k$.

$\boxed{6}$ Ingen biler forsvinner!

$$\begin{aligned} x_1 + 450 &= 610 + x_2 \\ x_2 + 520 &= 480 + x_3 \\ x_3 + 390 &= 600 + x_4 \\ x_4 + 640 &= 310 + x_1 \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ -40 \\ 210 \\ -330 \end{bmatrix}$$

Summen av ligningene gir $0 = 0$, og følgelig har vi uendelig mange løsninger siden de 3 første allerede er på echelon form. Med $x_4$ som fri variabel får vi generell løsning

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= 210 + t \\ x_2 &= -40 + (210 + t) = 170 + t \\ x_1 &= 160 + 170 + t = 330 + t \end{aligned}$$

Spesielt hvis $x_4 = 200$ : $\underline{\underline{x_3 = 410, x_2 = 370, x_1 = 530}}$

(Hvorfor får vi uendelig mange løsninger?)