



LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5009/10
august 1999

Oppgave 1 a) Skal finne den generelle løsningen av differensialligningen

$$y''' + y' = 4 \cos x.$$

Ved å innføre $z = y'$ får vi en 2. ordens diff.ligning $z'' + z = 4 \cos x$. Karakteristisk ligning blir

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Den generelle løsningen av den homogene ligningen blir da $z_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Da vil vi ha en partikulær løsning av formen $z_P = x(A \cos x + B \sin x)$. Deriverer og finner

$$z_P'' + z_P = 2B \cos x - 2A \sin x = 4 \cos x,$$

slik at $A = 0$ og $B = 2$, eller $z_P = 2x \sin x$. Altså er $y' = z = z_H + z_P = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x \sin x$. Integrerer og får

$$\underline{\underline{y = A + B \cos x + C \sin x - 2x \cos x.}}$$

b) Setter $y = x^k$ inn i ligningen og finner

$$\begin{aligned} x^2(x^k)'' + x(x^k)' - x^k &= 0, \quad x > 0 \\ \Leftrightarrow x^2 k(k-1)x^{k-2} + x k x^{k-1} - x^k &= 0, \quad x > 0 \\ \Leftrightarrow (k^2 - 1)x^k &= 0, \quad x > 0 \Leftrightarrow (k^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1. \end{aligned}$$

Da x og x^{-1} er lineært uavhengige løsninger blir

$$\underline{\underline{y = c_1 x + c_2 x^{-1}.}}$$

c) Har at $y = y_H + y_P$ der y_H er funnet i oppgave b. y_P kan finnes ved hjelp av metoden med variasjon av parametrene.

$$y_P = u_1 x + u_2 x^{-1}$$

der

$$\begin{aligned} xu'_1 + \frac{1}{x}u'_2 &= 0 \\ u'_1 + -\frac{1}{x^2}u'_2 &= -2e^x, \end{aligned}$$

slik at $u'_1 = -e^x$, $u'_2 = x^2e^x$. Får løsning $u_1 = -e^x$, $u_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x$ slik at $y_P = -2e^x(1 - x^{-1})$ passer.

$$\underline{\underline{y = c_1x + c_2x^{-1} - 2e^x(1 - x^{-1}), \quad x > 0.}}$$

d) $mx'' + 2x' + 1 = 0$ har karakteristisk ligning

$$m\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - m}}{m}$$

Vi får svingning når den karakteristiske ligningen har en kompleks rot, dvs. når $1 - m < 0$ eller $m > 1$.

Oppgave 2 a) Skal finne den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bruker elementære radoperasjoner på matrisen $[A|I]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

b) Rangenen kan f.eks finnes ved å se på antall ledende koeffisienter på redusert form.

$$M_a \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix}.$$

Dette gir for $a = 1$: rang $M_a = 1$.

For $a \neq 1$:

$$M_a \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{bmatrix}.$$

Da blir for $a = -1$: $\text{rang } M_a = 2$, mens $a \neq \pm 1$ gir $\text{rang } M_a = 3$.

c) Har $\dim \text{Col}(M_a) = \text{rang } M_a$ som er funnet over, mens $\dim \text{Null}(M_a) = 4 - \text{rang } M_a$ som gir

$$\underline{\underline{\dim \text{Null}(M_a) = \begin{cases} 3 & a = 1 \\ 2 & a = -1 \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}}}$$

Ser på matrisen

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utfra ledende koeffisienter på redusert form ser vi at en basis for $\text{Col}(M_{-1})$ er

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

$\text{Null}(M_{-1})$ er løsningene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

eller $\mathbf{x} = s[1, 0, 0, 1]^T + t[0, 1, 1, 0]^T$. En basis for $\text{Null}(M_{-1})$ er derfor

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 3 a) Ser at

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at 9 er en egenverdi for A . Finner de resterende egenverdiene til A ved

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (5 - \lambda)((5 - \lambda)^2 - 4) - 2(2(5 - \lambda) - 4) + 2(4 - 2(5 - \lambda)) \\ &= (5 - \lambda)^3 - 4(11 - 3\lambda) = (9 - \lambda)(3 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Eigenverdiene til A er

$$\underline{\underline{\lambda = 9 \text{ og } \lambda = 3 \text{ med multiplisitet 2.}}}$$

Eigenvektorene til $\lambda = 3$ er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

der s og t ikke begge er lik 0.

b) Finner, f.eks. ved hjelp av Gram-Schmidt, en egenvektor til $\lambda = 3$ som er ortogonal til $[1, -1, 0]^T$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1+0+0}{1+0+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dette gir (etter normalisering) den ortogonale matrisen P og diagonalmatrisen D

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

slik at $A = PDP^T$.

c) Generell løsning er etter a)

$$\mathbf{x} = c_1 e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Setter inn $\mathbf{x}(0)$ og finner $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Dette gir løsningen

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 4 **a)** Et endimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^2$ vil være en rett linje gjennom origo.

Nei, mengden av vektorer (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ slik at $3x + 2y + z = 1$ inneholder ikke nullvektoren $(0, 0, 0)$ og er derfor ikke et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Anta at $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Hvis vi tar skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider får vi

$$c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = c_i |\mathbf{v}_i|^2 = 0.$$

Siden $|\mathbf{v}_i| \neq 0$ må $c_i = 0$ for alle $i = 1, \dots, k$. Følgelig er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige.

Oppgave 5 a) Finner $\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)^2 - 9 = (\lambda - 8)(\lambda - 2)$ slik at egenverdiene til A er $\lambda = 8$ og $\lambda = 2$. Korresponderende egenvektorer blir da f.eks. $[1, 1]^T$ og $[-1, 1]^T$. Vi kan da sette opp ortogonalmatrisen P og diagonalmatrisen D

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

slik at $D = P^T A P$.

b) Skriver ligningen som

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 8 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = 8.$$

Vi innfører derfor det nye systemet $\tilde{\mathbf{x}} = P^T \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = P \tilde{\mathbf{x}}$. De nye aksene er derfor rettet langs søylevektorene i P . Videre

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 8 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}^T D \tilde{\mathbf{x}} = 8 \Leftrightarrow 8\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{x}_2^2 = 8 \Leftrightarrow \tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\tilde{x}_2}{2}\right)^2 = 1.$$

Kjeglesnittet er altså en ellipse.

