Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG SIF5010
19. mai 2001

Oppgave 1

Vi har

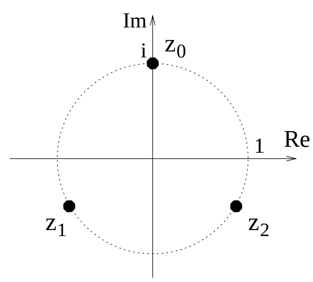
$$z^3 = \frac{1-i}{1+i} = -i \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{i3\theta} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$$

som gir

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

De tre røttene blir dermed

$$z_0 = \underline{\underline{e^{i\frac{\pi}{2}}}},$$
$$z_1 = \underline{\underline{e^{i\frac{7\pi}{6}}}}$$
$$z_2 = \underline{\underline{e^{i\frac{11\pi}{6}}}}$$



Oppgave 2

a) Her blir integrerende faktor

$$F(x) = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx} = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Multipliseres begge sider av ligningen med $F(x)$ får vi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\, y\right) = e^{-x}$$

slik at den generelle løsningen blir

$$y = -e^{-x}\cos x + C\cos x.$$

Initialverdien gir for $x = 0$

$$y(0) = -1 + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2.$$

Løsningen blir dermed

$$\underline{\underline{y = 2\cos x - e^{-x}\cos x = (2 - e^{-x})\cos x}}.$$

b) Her blir karakteristisk ligning: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ som har løsningene $\lambda = 1, -2$.
Løsningen av den homogene ligningen blir dermed

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Som partikulærløsning har vi $y_p = Ax + B$. Innsatt i ligningen finner vi at $A = -2$, $B = -1$. Dette gir dermed den generelle løsningen

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2x - 1.$$

Videre gir initialverdiene

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad C_1 - 2C_2 = 2 \end{aligned}$$

som medfører at $C_1 = 2$ og $C_2 = 0$.
Løsningen blir derfor

$$\underline{\underline{y = 2e^x - 2x - 1}}.$$

c) Karakteristisk ligning: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$. Altså er løsningen av den homogene ligningen

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Som partikulærløsning bruker vi

$$y_p = u_1 e^{-x} + u_2 x e^{-x}$$

der u_1 og u_2 er løsninger av ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-x}}{x} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

dvs. $u_1' = -1$, $u_2' = \frac{1}{x}$ slik at $u_1 = -x$, $u_2 = \ln x$.
Den generelle løsningen blir dermed

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - x e^{-x} + x \ln x \, e^{-x}$$

Vi trekker sammen felles ledd ($C_3 = C_2 - 1$) og får det endelig svaret

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + x \ln x \, e^{-x}}}$$

Oppgave 3

a) Vi skal løse

$$my'' + ky = 0.01\cos(0.5t) \qquad (k > 0)$$

Karakteristisk ligning blir $m\lambda^2 + k = 0$ som har løsninger $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$, og løsningen av den homogene ligningen blir

$$y_h = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Som partikulærløsning har vi

$$y_p = A\cos(0.5t) + B\sin(0.5t)$$

siden $\sqrt{k/m} \neq 0.5$. Satt inn i ligningen finner vi at $A = 0.01/(k - 0.25m)$, $B = 0$. Generell løsning blir dermed

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{0.01}{k - 0.25m}\cos(0.5t)$$

Setter vi inn startverdiene $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ finner vi at $C_1 = -A$ og $C_2 = 0$.

Altså

$$\underline{\underline{y = \frac{0.01}{k - 0.25m}\left(\cos(0.5t) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right)}}$$

b) Ved hjelp av formel s. 88 i Rottmann får vi

$$y = -\frac{0.02}{k - 0.25}\sin\left(\frac{0.5 + \sqrt{k}}{2}\,t\right)\sin\left(\frac{0.5 - \sqrt{k}}{2}\,t\right)$$

som så skal være lik ligningen oppgitt i oppgaven

$$y = 0.182\sin(0.55t)\sin(0.05t).$$

Eneste mulighet er da $0.5 + \sqrt{k} = 1.1 \Leftrightarrow \sqrt{k} = 0.6 \Leftrightarrow k = 0.36$. Ser også at denne verdien passer. Ergo: $\underline{\underline{k = 0.36}}$.

Oppgave 4 Start med å få A over på trappeform (eventuelt redusert trappeform, slik som vi har gjort)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -12 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11s - 11t \\ 4s + 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad s, t \text{ er reelle tall.}$$

Og

$$\underline{\underline{\text{Null}(A) \text{ har basis } (-11, 4, 1, 0),\ (-11, 3, 0, 1) \quad \text{(f.eks.)}}}$$

Vi ser at $(1, 1, 2)$ er første kolonne i A slik at en løsning av ligningen er $(1, 0, 0, 0)$. Løsningsmengden blir

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p} = s(-11, 4, 1, 0) + t(-11, 3, 0, 1) + (1, 0, 0, 0), \quad \text{for alle reelle t,s.}}}$$

b) Ut fra pivotelementene og redusert form (som vi egentlig ikke trenger) følger

$$\underline{\underline{\text{Col}(A) \text{ har basis } (1, 1, 2),\ (2, 5, 5), \quad \text{(f.eks.)}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Row}(A) \text{ har basis } (1, 0, 11, 11),\ (0, 1, -4, -3), \quad \text{(f.eks.)}}}$$

Da $\text{Row}(A)^{\perp} = \text{Null}(A)$ følger videre

$$\underline{\underline{\text{Row}(A) \perp \text{ har basis } (-11, 4, 1, 0),\ (-11, 3, 0, 1), \quad \text{(f.eks.)}}}$$

Oppgave 5

a)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ a^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = 0$$

Egenverdiene er $\underline{\underline{\lambda = 1 \pm a}}$.
For $a \neq 0$ har vi automatisk to lineært uavhengige egenvektorer.
For $a = 0$ må vi undersøke nærmere:

$$\text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \text{for alle } s \text{ i } \mathbb{R} \right\}. \text{ Dvs. bare en l.u.a. egenvektor.}$$

Vi får altså to lineært uavhengige egenvektorer for $\underline{\underline{a \neq 0}}$.

b) $\underline{a \neq 0}$:
For $\lambda_1 = 1 + a$ er $\text{Null}(A - \lambda_1 I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} -a & 1 \\ a^2 & -a \end{bmatrix}\right)$ slik at $(1, a)$ er en tilhørende egenvektor.
For $\lambda_2 = 1 - a$ er $\text{Null}(A - \lambda_2 I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix}\right)$ slik at $(1, -a)$ er en tilhørende egenvektor.
Generell løsning er da

$$\underline{\underline{\mathbf{y} = C_1 e^{(1+a)t} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + C_2 e^{(1-a)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix}}}$$

$\underline{a = 0}$:
Vi løser $(A - I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ som har $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en partikulærløsning.
Generell lœsning blir

$$\underline{\underline{\mathbf{y} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}}$$

<u>Alternativt</u> kan vi benytte at systemet er på trekantform for $a = 0$:

$$\begin{aligned} &(1) \quad y_1' = y_1 + y_2 \\ &(2) \quad y_2' = y_2 \end{aligned}$$

Den siste ligningen har løsningen $y_2 = C_2 e^t$. Innsatt i (1) får vi:

$$y_1' - y_1 = C_2 e^t$$

som kan løses ved bruk av integrerende faktor, dvs.

$$\frac{d}{dt}(e^{-t} y_1) = C_2 \Leftrightarrow e^{-t} y_1 = C_2 t + C_1$$

Tilsammen

$$\underline{\underline{\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}}} \qquad \text{(Stemmer!)}$$

Oppgave 6

a)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

slik at P har parvis ortogonale kolonner/rader av lengde 1. Altså er P ortogonal og $P^{-1} = P^T = P$ da P er symmetrisk.

<u>Alternativt</u>: $PP^T = PP = I$.

b)

$$AP = PD \quad \text{der} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP$$

Lar vi D_1 være en diagonalmatrise slik at $D_1^2 = D$ (diagonalelementene er $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) har vi

$$(\underbrace{PD_1P}_{M})^2 = PD_1PPD_1P = PDP = A.$$

Spesielt, med diagonalelementer $0, 1, 2, 3$:

$$M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}}}$$

Ved å velge blant $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ får vi i alt $2^3 = 8$ muligheter for M.

Oppgave 7

For at løsningsmengden skal være et underrom må nullvektor (her $y(x) = 0$ for alle x i $\mathbb{R}$) være en løsning. Men da må r være <u>nullfunksjonen</u>; $r(x) = 0$ for alle x i $\mathbb{R}$. Er r lik nullfunksjonen blir løsningsmengden et underrom: Summen av to løsninger er igjen en løsning, en løsning multiplisert med en skalar er også en løsning. ("Superposisjonsprinsippet.")