Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

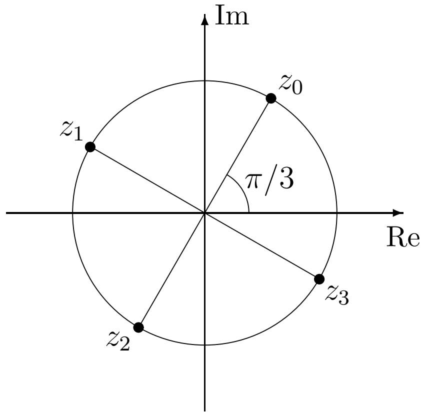
30. mai 2003

Tid: 09:00–14:00

Løsningsforslag

Oppgave 1 Fra $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ fås $z_k = e^{\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}i}$ for $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 &= e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= \underline{e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} \end{aligned}$$



Oppgave 2 Siden $x + 1 = \mathrm{Re}(z+1) = |z-1| \geq 0$, må $x \geq -1$, og vi har

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z+1) = |z-1| &\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4x. \end{aligned}$$

Kurven er parabelen $y^2 = 4x$.

Oppgave 3

a) Fra $y' = 1 + 2xy$ og $y(0) = 0$ gir Eulers metode med $h = \frac{1}{10}$ at

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{10}\left(1 + 2x_n y_n\right),$$

og

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & x_0 &= 0 \\ y_1 &= 0{,}1 & x_1 &= 0{,}1 \\ y_2 &= 0{,}202 & x_2 &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Så $y(0{,}2) \approx y_2 = \underline{0{,}202}$.

b) $(*)$ $y' - 2xy = 1$ har integrerende faktor $F(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$, så vi får

$$\left(ye^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}.$$

Altså er

$$ye^{-x^2} = \int_0^x e^{-t^2}dt + C,$$

og $y(0) = 0$ gir $C = 0$. Så $\underline{y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}$. Med svaret fra a) er da

$$\int_0^{0,2} e^{-t^2}dt \approx y_2 e^{-0{,}04} \approx \underline{0{,}194}$$

(der den siste tilnærmelsen skyldes en kalkulatorutregning).

Oppgave 4

a) $y'' - y' - 2y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ med røtter $\lambda = -1$ og $\lambda = 2$. Siden 2 er en enkel rot i den karakteristiske ligningen, har $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ en partikulær løsning på formen $y = Axe^{2x}$. Innsetting gir $A = 1$, så generell løsning er

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + xe^{2x}.$$

Her er $y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$, så $y(0) = 4$ og $y'(0) = 0$ gir ligningene

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ -c_1 + 2c_2 &= -1, \end{aligned}$$

og $c_1 = 3$, $c_2 = 1$. Løsningen er $\underline{y = 3e^{-x} + e^{2x} + xe^{2x}}$.

b) $y'' - 2y' + y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, som har $\lambda = 1$ som dobbelrot. Da er $y_1 = e^x$ og $y_2 = xe^x$ to lineært uavhengige løsninger av den homogene ligningen. Høyresiden gjør at vi må bruke variasjon av konstantene for å finne en partikulær løsning, dvs. vi setter $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ der u_1 og u_2 oppfyller

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Her er Wronskien

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x},$$

så Cramers regel (pluss integrasjon) gir

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & * \end{vmatrix} dx = -\int dx = -x, \\ u_2 &= \int \frac{1}{W} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ * & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x. \end{aligned}$$

Generell løsning er da ($x > 0$)

$$\underline{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x e^x \ln x}.$$

c) $y'' + 9y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 + 9 = 0$ med røtter $\pm 3i$. Ligningen $y'' + 9y = \sin \omega t$ har begrenset løsning hvis $\omega^2 = 9$ da

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{\sin \omega t}{9 - \omega^2}.$$

For $\omega = 3$ blir $y_p = t\,(A \cos 3t + B \sin 3t)$ der $A = -\frac{1}{6}$ og $B = 0$. Ved å se på $t = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, har vi $|y_p| = \frac{1}{6} n\pi \to \infty$ når $n \to \infty$. Svaret er altså $\underline{\omega = 3}$.

Oppgave 5

a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & \alpha+1 & \beta-4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \beta-2 \end{array}\right].$$

Så $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har

1) nøyaktig én løsning for $\alpha \neq 1$
2) uendelig mange løsninger for $\alpha = 1$ og $\beta = 2$
3) ingen løsninger for $\alpha = 1$ og $\beta \neq 2$

Med $\alpha = 1$ og $\beta = 2$ er løsningene

$$\underline{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Basis er for

$$\mathrm{Null}(A) : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Col}(A) : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Row}(A) : \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Oppgave 6

a) Egenverdiene:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)-2(-2\lambda-2)+2(2\lambda+2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)+8(\lambda+1) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-5) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0\end{aligned}$$

gir $\underline{\lambda_1=\lambda_2=-1}$ og $\underline{\lambda_3=5}$.

Egenvektorene:

$\lambda_1=\lambda_2=-1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ gir } \underline{\mathbf{x}=s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (s,t)\neq(0,0).}$$

$\lambda_3=5$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ gir } \underline{\mathbf{x}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t\neq 0.}$$

b) La $\mathbf{x}_1=(1,-1,0)$. Vi bruker Gram-Schmidt og får

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

La $\mathbf{x}_3=(1,1,1)$. Dette er da 3 ortogonale egenvektorer. Vi normerer og får

$$\underline{P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}, \text{ med } \underline{D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}.$$

c) Vi vet at løsningen her er

$$\underline{\mathbf{y}=c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+c_3e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Oppgave 7 Siden $P^{\mathrm{T}}P = I$, får vi $|P\mathbf{x}|^2 = P\mathbf{x} \cdot P\mathbf{x} = (P\mathbf{x})^{\mathrm{T}} P\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} P\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, som gir $|P\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$.

Oppgave 8

a) Vi får $\underline{x_{k+1} = 0{,}6x_k + 0{,}2y_k}$ og $\underline{y_{k+1} = 0{,}4x_k + 0{,}8y_k}$ for $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ der $x_0 = 5$ og $y_0 = 4$ millioner. La $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ og la $\mathbf{z}_k = (x_k, y_k)$. Da er $\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k$ og derfor er $\mathbf{z}_n = A^n\mathbf{z}_0$. Matrisen A har egenverdiene $\lambda_1 = 2/5 = 0.4$ og $\lambda_2 = 1$ med tilhørende egenvektorer $(1, -1)$ og $(1, 2)$. Altså er

$$\mathbf{z}_n = A^n\mathbf{z}_0 = PD^nP^{-1}\mathbf{z}_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2(0.4)^n \\ 6 - 2(0.4)^n \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\begin{aligned} x_n &= 3 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ y_n &= \underline{6 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n} \end{aligned}$$

millioner. Når $n \to \infty$ vil $x_n \to 3$ og $y_n \to 6$, dvs. på lang sikt vil <u>3 millioner bo i byen og 6 millioner bo på landet</u>.

b) I denne modellen er $y_1' = -0{,}4y_1 + 0{,}2y_2$ og $y_2' = 0{,}4y_1 - 0{,}2y_2$, dvs. $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ der

$$\underline{B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}.$$

Merk at $B = A - I$, så B har egenverdiene $-3/5$ og 0 med de samme egenvektorene som A. Da er (jf. a))

$$\underline{\mathbf{y} = 2e^{-\frac{3}{5}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}.$$

Denne modellen gir samme befolkningsfordeling på lang sikt som modellen i a).