



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

SIF5010 Matematikk 3
for fakultet E og F
våren 1998

Løsningsforslag eksamen våren 1998

Eksamen SIF5010, mai 98

1 a)

$$y'' \Leftrightarrow 2y' + 5y = \sin x$$

$$P(r) = r^2 \Leftrightarrow 2r + 5 = 0, \quad \underline{r = 1 \pm 2i}$$

Som gir

$$y_h = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Partikulærløsningen bestemmes vha ubestemte koeffisienters metode:

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x. \quad \text{Dette gir}$$

$$y_p'' \Leftrightarrow 2y_p' + 5y_p = (5A \Leftrightarrow 2B \Leftrightarrow A) \cos x + (5B + 2A \Leftrightarrow B) \sin x = \sin x,$$

dvs.

$$4A \Leftrightarrow 2B = 0$$

$$4B + 2A = 1,$$

med løsning $B = 1/5, A = 1/10$. Generell løsning blir da

$$\underline{\underline{y_{\text{gen}} = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x}}$$

b) Her må $r = 1$ være dobbeltrot og $r = 4$ enkelrot. Dermed

$$(D \Leftrightarrow 1)^2 (D \Leftrightarrow 2)y = (D^2 \Leftrightarrow 2D + 1)(D \Leftrightarrow 2)y = (D^3 \Leftrightarrow 4D^2 + 5D \Leftrightarrow 2)y = 0$$

Ligningen blir følgelig

$$\underline{\underline{y''' \Leftrightarrow 4y'' + 5y' \Leftrightarrow 2y = 0}}$$

2 a) For senere bruk i d) bringer vi den koeffisientmatrisen over på echelonform (trappeform):

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \Leftrightarrow 2 & \Leftrightarrow 5 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 3 & 15 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 10 & 2 & 8 & \Leftrightarrow 2 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 6 & \alpha \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 & 5 & 1 & 10 & 2 \\ 0 & \Leftrightarrow 3 & 15 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 10 & 2 & 8 & \Leftrightarrow 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \Leftrightarrow 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \Leftrightarrow 5 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 10 & \Leftrightarrow 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Leftrightarrow 12 & \Leftrightarrow 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Leftrightarrow 12 & \Leftrightarrow 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \Leftrightarrow 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \Leftrightarrow 5 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 10 & \Leftrightarrow 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \Leftrightarrow 3 \end{pmatrix}$$

Dermed leser vi ut en basis for Row (A):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Leftrightarrow 5 \\ \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at kolonnene 1, 2 og 5 svarer til basiskolonner i den opprinnelige matrisen slik at en basis for $\text{Col}(A)$ blir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \Leftrightarrow 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \Leftrightarrow 5 \\ \Leftrightarrow 3 \\ \Leftrightarrow 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Fra echelonformen i a) ser vi også at x_3 og x_4 er frie variable, og dermed får vi $\text{Null}(A)$ bestemt av at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Null}(A) \Leftrightarrow x_5 = 0, \quad \begin{array}{l} x_2 = 5x_3 + x_4 \\ x_1 = \Leftrightarrow 2x_2 = \Leftrightarrow 10x_3 + \Leftrightarrow 2x_4 \\ x_3, x_4 \text{ frie variable.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_4 = t \\ x_3 = s \\ x_2 = 5s + t \\ x_1 = \Leftrightarrow 2x_2 = \Leftrightarrow 10s + \Leftrightarrow 2t \end{array}$$

$\text{Null}(A)$ består følgelig av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 10s + \Leftrightarrow 2t \\ 5s + t \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 10 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Dette betyr at

$$\begin{pmatrix} \Leftrightarrow 10 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er basisvektorer for $\text{Null}(A)$.

c) Det ortogonale komplementet til $\text{Null}(A)$, $\text{Null}(A)^\perp$, er identisk med $\text{Row}(A)$, og basisen er følgelig allerede bestemt under spørsmål a).

d) Fra echelonformen i a) ser vi at skal $Ax = b$ ha løsninger for $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \Leftrightarrow 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, må

α være lik 3.

3 a) Vi bestemmer egenverdiene:

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \Leftrightarrow 2 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1 & \lambda - \Leftrightarrow 2 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & \lambda - \Leftrightarrow 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \Leftrightarrow 6\lambda^2 + 9\lambda + 4 = \underline{(\lambda - \Leftrightarrow 1)^2(\lambda - 4)}$$

som gir $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 4$.

Egenvektorer for $\lambda = 1$:

$$(A - I) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Dvs.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{er en egenvektor}$$

hvis $x + y + z = 0$. Her blir egenrommet E_1 todimensjonalt og en mulig basis for E_1 blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer for $\lambda = 4$:

$$(A - 4I) \sim \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 2 & 1 & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow 2 & 1 \\ 1 & 1 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \Leftrightarrow 2 \\ 0 & \Leftrightarrow 3 & 3 \\ 0 & 3 & \Leftrightarrow 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \Leftrightarrow 2 \\ 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og egenrommet utspennes av $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) Et mulig valg for S blir følgelig

$$S = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}, \quad \text{og da blir}$$

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Fra teorien vet vi (og ser!) at egenvektorene tilhørende $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$ er ortogonale, mens $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ slik vi valgte dem ovenfor ikke er det. Vi lager en ny basis for E_1 ved å beholde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, og finner en ny basisvektor $\mathbf{u}_2$ som er ortogonal på $\mathbf{u}_1$. Her kan $\mathbf{u}_2$ ha formen $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \alpha \mathbf{u}_1$ der vi krever at $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1(\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \alpha \mathbf{u}_1) = 0$, dvs. $\alpha = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1$.

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$$

(Dette er starten på Gram-Schmidt's ortogonaliseringsprosess).

Til sammen kan vi nå finne en *ortogonal* basis for hele $\mathbb{R}^3$ basert på $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{v}_4$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Om vi setter

$$S = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

har vi en ortogonal matrise med egenskapen i b).

d) Siden vi kjenner egenverdier og egenvektorer til koeffisientmatrisen, og siden egenvektorene utspenner hele $\mathbb{R}^3$, kan vi sette opp løsningen umiddelbart:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

e)

$$(P|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \end{array} \right)$$

$$\supset: P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \Leftrightarrow 1 & 2 & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \end{array} \right)$$

(Alternativ løsning vha. adjungert matrise gir naturligvis samme svar).

f) Vi observerer at systemet kan skrives som $P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ved å multiplisere

med P^{-1} får vi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, som er systemet i d).

Vi får altså samme generelle løsning og ingen ytterligere regning.

4 La G_n og U_n betegne antallet gifte og ugifte kvinner etter n år. Vi har oppgitt at $G_n + U_n = 10000$ og at $\begin{pmatrix} G_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \end{pmatrix}$.

Ut fra opplysningene i oppgaven kan vi sette opp

$$G_{n+1} = G_n \Leftrightarrow 0.3G_n + 0.2U_n = 0.7G_n + 0.2U_n$$

$$U_{n+1} = U_n \Leftrightarrow 0.2U_n + 0.3G_n = 0.3G_n + 0.8U_n$$

Dette kan vi skrive som

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_n \\ U_n \end{pmatrix}$$

Dermed får vi

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G_3 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 5500 \end{pmatrix}$$