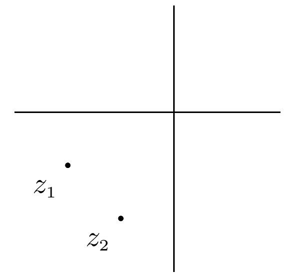
TMA4115 Matematikk 3
eksamen 09.08.04

Løsningsforslag

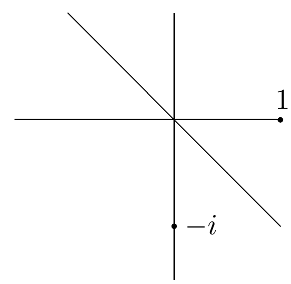
$\boxed{1}$ Den vanlige formelen for røttene i en annengradsligning gir $z = \frac{-3-3i\pm\sqrt{-2i}}{2}$

Vi har $\sqrt{-2i} = \sqrt{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm(1-i)$, altså er $z = -\frac{3+3i}{2} \pm \frac{1-i}{2}$.

Røttene er $z_1 = -2 - i$ og $z_2 = -1 - 2i$.



$\boxed{2}$ Vi har $\{(x, y) \,|\, |x + iy + i| = |x + iy - 1|\} = \{(x, y) \,|\, x = -y\}$. Dette er enklest å se geometrisk siden det her er snakk om alle komplekse tall som har samme avstand fra $-i$ som fra 1.



$\boxed{3}$ Ligningen er ikke lineær fordi den ukjente funksjonen y forekommer i andre potens. Med andre ord ligningen er ikke av formen $y' + p(x)y = q(x)$.

Eulers metode med skrittlengde h brukt på ligningen $y' = f(x, y)$ med begynnelseskravene $y(a) = b$ gir et skjema

n	0	1	2	
x_n	$x_0 = a$	$x_1 = a + h$	$x_2 = a + 2h$	
y_n	$y_0 = b$	$y_1 = b + hf_0$	$y_2 = y_1 + hf_1$	
f_n	$f_0 = f(a, b)$	$f_1 = f(x_1, y_1)$	$f_2 = f(x_2, y_2)$	

I denne oppgaven er $a = 0$, $b = 1$ og $f(x, y) = x^2 + y^2$, så skjemaet blir

n	0	1	2	
x_n	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.1$	$x_2 = 0.2$	
y_n	$y_0 = 1$	$y_1 = 1.1$	$y_2 = 1.222$	
f_n	$f_0 = 1$	$f_1 = 1.22$	$f_2 = 1.533284$	

Vi får altså $f(0.2) \approx y_2 = 1.222$.

4 Vi må bestemme a og b slik at den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har røtter $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ og $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Dette får vi ved å velge $a = -(\lambda_1+\lambda_2) = -2$ og $b = \lambda_1\lambda_2 = -1$. Ligningen blir altså $y'' - 2y' - y = 0$.

5 **a)** Den generelle løsningen er av formen $y = (Ax+C)\cos x + (Bx+D)\sin x$. Koeffisientene A og B bestemmes ved innsetting.

$y = (Ax + C)\cos x + (Bx + D)\sin x$

$y' = (Bx + A + D)\cos x + (-Ax + B - C)\sin x$

$y'' = (-Ax + 2B - C)\cos x + (-Bx - 2A - D)\sin x.$

Ligningen $y'' + y = 2B\cos x - 2A\sin x = \cos x$ viser at $A = 0$ og $B = \frac{1}{2}$.

Løsningen er $y = C\cos x + (\frac{1}{2}x + D)\sin x$.

b) Dersom y_0 og y_1 er fundamentale løsninger av den lineære differensialligningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ og v_0 og v_1 er løsninger av det lineære ligningsystemet

$$\begin{aligned} y_0\, v_0 + y_1\, v_1 &= 0 \\ y_0'\, v_0 + y_1'\, v_1 &= r(x), \end{aligned}$$

og funksjonene u_0 og u_1 er slik at $u_0' = v_0$ og $u_1' = v_1$, så er $y = u_0y_0 + u_1y_1$ løsning av den inhomogene differensialligningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

I dette tilfellet kan vi f. eks. velge $y_0 = \cos x$ og $y_1 = \sin x$.

Ligningssystemet blir da

$$\begin{aligned} \cos x\, v_0 + \sin x\, v_1 &= 0 \\ -\sin x\, v_0 + \cos x\, v_1 &= \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

som har løsning $v_0 = -\tan x$ og $v_1 = 1$. Antideriverte er $u_0 = A + \ln\cos x$ og $u_1 = B + x$, og den generelle løsningen blir $y = (A + \ln\cos x)\cos x + (B + x)\sin x$.

6 Vi lar t betegne tiden i minutter fra saltblandingen begynner å strømme, og vi lar $y(t)$ betegne antall gram salt i tanken etter t minutter.

I løpt av et meget kort tidsintervall på Δt minutter strømmer det da for $0 \le t \le 10$ $50 \times 2 \times \Delta t$ gram salt inn og $y(t)/100 \times 2 \times \Delta t$ gram salt ut av tanken. Etter at 10 minutter er godt strømmer det ikke noe salt inn, men fremdeles $y(t)/100 \times 2 \times \Delta t$ gram salt ut av tanken. Ligningene som må løses blir derfor

$$\begin{aligned} y' &= 100 - (\tfrac{1}{50})y \qquad \text{for} \qquad 0 \le t < 10 \\ y' &= \qquad\; - (\tfrac{1}{50})y \qquad \text{for} \qquad 10 \le t < \infty \end{aligned}$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned} y(t) &= 5000(1 - e^{-\frac{t}{50}}) \qquad \text{for} \qquad 0 \le t < 10 \\ y(t) &= 5000(1 - e^{-\frac{1}{5}})e^{-\frac{t-10}{50}} \qquad \text{for} \qquad 10 \le t < \infty \end{aligned}$$

a) Etter 10 minutter er det $5000(1-e^{-\frac{1}{5}})$ gram ≈ 906 gram salt i tanken.

b) Etter 20 minutter er det $5000(1-e^{-\frac{1}{5}})e^{-\frac{1}{5}}$ gram ≈ 742 gram salt i tanken.

$\boxed{7}$ **a)** Vi begynner med å radredusere systemets tilleggsmatrise til redusert trappeform.

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\3&7&2&2\\2&3&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&-1\\2&3&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&-1\\0&-1&-3&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&-1\\0&0&-1&-3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&-7\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&15\\0&1&0&-7\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

Her kan vi så bare lese av løsningen

$x=15$, $y=-7$ og $z=3$.

b) Determinanten til dette systemet er $\begin{vmatrix}1&2&0\\3&7&2\\2&3&-a\end{vmatrix}=2-a.$

For $a=2$ reduserer tilleggsmatrisen seg til

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\3&7&2&b\\2&3&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&b-3\\2&3&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&b-3\\0&-1&-2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&b-3\\0&0&0&b-5\end{bmatrix}$$

Følgelig har systemet i) nøyaktig en løsning når $a\neq 2$ og b er vilkårlig, aldri ii) nøyaktig to løsninger, iii) uendelig mange løsninger når $a=2$ og $b=5$, og iv) ingen løsninger når $a=2$ og $b\neq 5$.

$\boxed{8}$ Kolonnerommet og radrommet til en matrise har alltid samme dimensjon. Denne dimensjonen er rangen til matrisen. I dette tilfellet er $\text{rang}(A)=6-4=2$.

$\boxed{9}$ Det lønner seg alltid å beregne projeksjonen inn på rommet med minst dimensjon først. Vi har $\dim(V)=3$ og $\dim(V^{\perp})=1$

Vi finner en basis for $V^{\perp}$ ved å løse det homogene ligningssystemet med matrise

$$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$ Her har vi trukket første rad fra siste.

Vi ser at dersom vi velger å sette $x=-1$ så får vi $y=2$, $z=3$ og $u=2$. Siden rangen til matrisen er 3, vil alle løsninger være et multiplum av denne, og en basis for $V^{\perp}$ er gitt ved vektoren $\mathbf{v}_4=(-1,2,3,2)$.

Projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn på $V^{\perp}$ er $P_{V^{\perp}}(\mathbf{b})=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_4}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{v}_4$, og videre er $P_V(\mathbf{b})+P_{V^{\perp}}(\mathbf{b})=\mathbf{b}$.

Følgelig er

b) $P_{V^{\perp}}(\mathbf{b})=\mathbf{v}_4=(-1,2,3,2)$, og

a) $P_V(\mathbf{b})=\mathbf{b}-\mathbf{v}_4=(1,-2,-3,7)$.

10 **a)** Den karakteristiske til matrisen A er $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix}$. Her er det lett å se at matrisen har rang 1 når $\lambda = \lambda_1 = 6$ og når $\lambda = \lambda_2 = 8$.

En egenvektor tilhørende λ_1 er $\mathbf{v}_1 = [1, -1]^{\mathrm{T}}$, og en egenvektor tilhørende λ_2 er $\mathbf{v}_1 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$.

b) La P være den ortogonale matrisen $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siden P er ortogonal er $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$, og $AP = PD$, der $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Med variabelskifte $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, får vi $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Merk at $[x', y'] = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = [x, y]P$

Dermed ser vi at

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 = [x, y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]PDP^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x', y']D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 6(x')^2 + 8(y')^2.$$

11 En diagonalmatrise D med en diagonal bestående av bare 1-ere og -1-ere har egenskapen $D^2 = I$. Siden A er diagonaliserbar kan vi skrive $A = B^{-1}DB$ der D er diagonal og med kun 1-ere og -1-ere på diagonalen. Følgelig er

$A^2 = B^{-1}DBB^{-1}DB = B^{-1}D^2B = B^{-1}B = I$, som viser at $A^{-1} = A$. □