TMA4115 Matematikk 3 eksamen 08.06.05

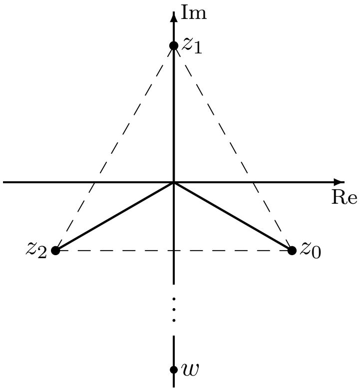
Løsningsforslag

1 Vi har

$$w = \frac{8(1-i)}{1+i} = \frac{8(1-i)}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-16i}{2} = -8i = 8e^{-\pi i/2}.$$

Løsningene av ligningen $z^3 = w$ er

$$\begin{aligned} z = z_k &= \sqrt[3]{8}\, e^{i(-\pi/6+2k\pi/3)} \\ &= 2e^{(4k-1)\pi i/6}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$



På formen $a + ib$ blir løsningene

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{-\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i, \\ z_1 &= 2e^{\pi i/2} = 2i, \\ z_2 &= 2e^{7\pi i/6} = -\sqrt{3} - i \quad \text{(se figuren).} \end{aligned}$$

2 **a)** Differensialligningen $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ er en Cauchy-Euler-ligning, og vi finner løsningen ved å sette inn $y = x^m$. På venstresiden får vi

$$x^2\,(x^m)'' + x\,(x^m)' - 4\,(x^m) = x^m\,[m(m-1) + m - 4] = x^m\left[m^2 - 4\right].$$

Hvis $y = x^m$ skal være løsning, må vi ha $m^2 - 4 = 0$, $m = \pm 2$. Det gir generell løsning

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-2}.$$

Av initialbetingelsene $3 = y(1) = C_1 + C_2$ og $2 = y'(1) = 2C_1 - 2C_2$ får vi $C_1 = 2$ og $C_2 = 1$. Løsningen på initialverdiproblemet blir da

$$y = 2x^2 + x^{-2}, \quad x > 0.$$

b) Den generell løsningen av $y'' + 2y' + y = x^{1/3}e^{-x}$ har formen $y = y_h + y_p$. Her er $y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, og vi kan bruke metoden med "variasjon av parametrene" for å finne en partikulær løsning y_p. Vi setter $y_p = ue^{-x} + vxe^{-x}$, og bestemmer u og v ved at u' og v' skal passe i ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^{-x}u' + xe^{-x}v' &= 0 \\ -e^{-x}u' + (1-x)e^{-x}v' &= x^{1/3}e^{-x}, \end{aligned} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} u' + xv' &= 0 \\ -u' + (1-x)v' &= x^{1/3}. \end{aligned}$$

Ved å addere ligningene får vi $v' = x^{1/3}$ som gir $v = \frac{3}{4}x^{4/3}$. Av den første ligningen følger da $u' = -xv' = -x^{4/3}$ som gir $v = -\frac{3}{7}x^{7/3}$. Dermed blir

$$y_p = -\frac{3}{7}x^{7/3}e^{-x} + \frac{3}{4}x^{4/3}xe^{-x} = \frac{9}{28}x^{7/3}e^{-x},$$

og generell løsning er

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{9}{28}x^{7/3}e^{-x}.$$

3 **a)** Vi løser ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved å omforme A til en echelonmatrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 & -1 \\ 4 & -8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-4)R_1+R_3]{(3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[(5)R_2+R_3]{(\frac{1}{4})R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

Med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ er x_1 og x_3 ledervariabler og x_2 og x_4 følgelig frie variabler. Setter vi $x_2 = s$ og $x_4 = t$, får vi ved tilbakesubstitusjon $x_3 = x_4 = t$ og $x_1 = 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2s - t$. Løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er altså

$$\mathbf{x} = (2s - t, s, t, t) = s(2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

b) For å avgjøre om ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning, gjør vi de samme radoperasjonene som i **a)** på totalmatrisen $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$. Det gir

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{b}' \end{bmatrix}.$$

Av echelonmatrisen $\begin{bmatrix} E & \mathbf{b}' \end{bmatrix}$ ser vi at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent hvis og bare hvis $c = 1$. Når $c = 1$ kan vi igjen sette $x_2 = s$ og $x_4 = t$, og vi får ved tilbakesubstitusjon $x_3 = 3 + x_4 = 3 + t$ og $x_1 = 4 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 + 2s - t$. Løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $c = 1$ er følgelig

$$\mathbf{x} = (-2 + 2s - t, s, 3 + t, t) = s(2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1) + (-2, 0, 3, 0), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

c) En basis for radrommet til A får vi ved å ta ikkenullradene i echelonmatrisen E i **a)**:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 2, -1), \;\; \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, -1).$$

En ortogonal basis får vi ved å bruke Gram-Schmidts algoritme på $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v_1} = (1, -2, 2, -1)$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = (0, 0, 1, -1) - \frac{3}{10}(1, -2, 2, -1) = -\frac{1}{10}(3, -6, -4, 7).$$

Vi kan sløyfe den skalare faktoren $-\frac{1}{10}$ i $\mathbf{u}_2$, og får følgende ortogonale basis for $\mathrm{Row}(A)$:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -2, 2, -1), \;\; \mathbf{u}_2 = (3, -6, -4, 7).$$

En basis for Row(A)$^{\perp}$ finner vi ved å utnytte at $\mathrm{Row}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(A)$, løsningsrommet for $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fra svaret i **a)** ser vi at en basis for Row(A)$^{\perp}$ er

$$\mathbf{w}_1 = (2, 1, 0, 0), \;\; \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1, 1).$$

4 Vi kan finne verdien av determinanten ved f.eks. å utvikle etter første rad:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2)^3 - 8 \cdot 1^3 = 8.$$

5 **a)** Generelt har vi

$$\text{rang}(A) + \dim \text{Null}(A) = n$$

når A er en $m \times n$-matrise. Her er $n = 5$ og $\dim \text{Null}(A) = 3$. Siden $\text{rang}(A)$ er kolonnerommets (og radrommets) dimensjon, følger $\dim \text{Col}(A) = 2$, og riktig svar er alternativ **B**.

b) Ved å multiplisere A med hver av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$, får vi

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siden $(3, 0, -6) = 3(1, 0, -2)$, er $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ en egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda = 3$. Riktig svar er følgelig alternativ **B**.

6 **a)** Vi finner egenverdiene til $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ ved å løse ligningen $|A - \lambda I| = 0$. Her er

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2)$$

så egenverdiene til A er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -2$.

For $\lambda_1 = 0$ får vi

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, og alle egenvektorene for $\lambda_1 = 0$ er gitt ved $s\mathbf{v_1}$, $s \neq 0$.

For $\lambda_2 = -2$ får vi

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$, og alle egenvektorene for $\lambda_2 = -2$ er gitt ved $t\mathbf{v_2}$, $t \neq 0$.

Gitt $k \neq 0$. Av $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ følger $kA\mathbf{v} = k\lambda\mathbf{v}$. Matrisen kA har derfor egenverdiene $k\lambda_1 = 0$ og $k\lambda_2 = -2k$ og de samme egenvektorene som A. (Når $k = 0$, er kA nullmatrisen, og alle vektorer $\neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^2$ er egenvektorer for kA.)

b) For $x = x(t)$ og $y = y(t)$ får vi differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4 \cdot \frac{x}{100} + 4 \cdot \frac{y}{100} \\ \frac{dy}{dt} &= 4 \cdot \frac{x}{100} - 4 \cdot \frac{y}{100} \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{25}A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

der A er matrisen i **a)**. Egenverdiene $(k\lambda)$ til $\frac{1}{25}A$ er 0 og $-2/25$ med tilhørende lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ og $\mathbf{v_2} = (1, -1)$. Det gir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{0t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t/25}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-2t/25} \\ y &= C_1 - C_2 e^{-2t/25}. \end{aligned}$$

Av initialbetingelsene $0 = x(0) = C_1 + C_2$ og $10 = y(0) = C_1 - C_2$ får vi $C_1 = 5$ og $C_2 = -5$. Følgelig er

$$x(t) = 5 - 5e^{-2t/25} \text{ [g]} \quad \text{og} \quad y(t) = 5 + 5e^{-2t/25} \text{ [g]} \quad \text{for } t > 0.$$

$\boxed{7}$ Vi har

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''. \end{aligned}$$

Ved å utnytte at $y_1'' = -py_1' - qy_1$ og $y_2'' = -py_2' - qy_2$, får vi

$$\begin{aligned} W' + p(x)W &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + py_1 y_2' - py_2 y_1' \\ &= y_1\left(-py_2' - qy_2\right) - y_2\left(-py_1' - qy_1\right) + py_1 y_2' - py_2 y_1' = 0. \end{aligned}$$

En integrerende faktor for ligningen $W' + p(x)W = 0$ er $F(x) = e^{\int p(x)\,dx}$. Følgelig kan ligningen skrives $\left(e^{\int p(x)\,dx} W\right)' = 0$, og løsningen er

$$e^{\int p(x)dx} W = C \quad \text{dvs.} \quad W = Ce^{-\int p(x)dx}$$

der C er en konstant. (Dette uttrykket for W går under navnet *Abels formel.*) Hvis $C = 0$ så er $W = W(x) = 0$ for alle $x \in I$. Hvis $C \neq 0$ så er $W = W(x) \neq 0$ for alle $x \in I$.