

Faglig kontakt under eksamen:  
Magnus Landstad 47259811, 73591753



EKSAMEN I TMA4110/15 MATEMATIKK 3

Bokmål

Torsdag 9 August 2012

Tid: 9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)  
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 30 August 2012

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at framgangsmåten går tydelig fram. Hver av de 7 oppgavene har samme vekt.*

**Oppgave 1** Skriv alle løsningene av  $z^3 = 1$  på formen  $z = x + iy$ .

Skriv alle løsningene av  $z^3 = \frac{-3+i}{\sqrt{2}(2+i)}$  på formen  $z = x + iy$  og tegn løsningene i det komplekse planet.

**Oppgave 2** Finn løsningen av  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$  for  $x > 0$  med  $y(1) = y'(1) = 0$ .

**Oppgave 3** Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensiallikningen  $y'' + 2cy' + 4y = 0$  for en gitt konstant  $c > 0$ .

For hvilke verdier av  $c$  er bevegelsen underdempet, overdempet eller kritisk dempet?

Finn den stasjonære løsningen (the steady-state solution)  $y_s$  av likningen  $y'' + 2y' + 4y = \cos t$ .

**Oppgave 4** La  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  være lineær transformasjonen gitt ved

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = 2x + 2y - z + w.$$

Finn en ortonormal basis for nullrommet til  $T$ .

1000  
1000  
1000

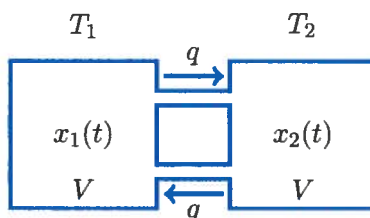


**Oppgave 5** La  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & -1 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

For hvilke verdier av  $t$  har likningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ingen, en, eller uendelig mange løsninger?

**Oppgave 6** For hvilke tall  $a$  har  $\mathbb{R}^2$  en basis av egenvektorer for matrisen  $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ?

**Oppgave 7** Mellom to vanntanker,  $T_1$  og  $T_2$ , hver med volum  $V = 100$  liter, er det to rør som vist på figuren nedenfor.



Tankene inneholder saltvann, der  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  er gram salt i hver tank ved tiden  $t$ . Det renner saltvann fra tank  $T_1$  til tank  $T_2$ , og tilsvarende fra  $T_1$  inn i  $T_2$ , med rate  $q = 1$  liter per sekund begge veier. Vi ser bort fra volumet til rørene, og antar umiddelbar miksing av saltvann (dvs saltkonsentrasjonen i hver tank er den samme overalt i tanken ved samme tidspunkt).

Vis at  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  oppfyller systemet:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

og finn  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  når  $x_1(0) = 100$  g og  $x_2(0) = 0$  g.

Når er  $x_2(t) = 25$  g?

