Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Paul Arne Østvær
Telefon: 73 59 35 17

EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

Bokmål
Fredag 22. desember 2000
Kl. 09:00-14:00
Sensur: 2. februar 2001

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.
Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1

a) Finn tredjerøttene til i. Skriv røttene på formen $a + ib$ der a og b er reelle tall, og tegn røttene i det komplekse plan.

b) Finn alle komplekse tall $z = x + iy$ slik at $|z + \sqrt{2}| - |z - \sqrt{2}| = 2$.
Tegn figur av løsningene.

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2.$$

a) Finn løsningen $y = y(x)$ av $(*)$ for $x > 0$.

b) Tilnærm $y(\frac{5}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{2}$. Hvor stort er avviket i svaret sammenlignet med den eksakte verdien?

Oppgave 3

Finn generell løsning av differensialligningene

a) $2y'' - 3y' + y = 2xe^x$

b) $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\cos x}, \ |x| < \dfrac{\pi}{2}.$

Oppgave 4

La a, b og c være reelle tall. Gitt ligningssystemet

$$(*) \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ der } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Hvilken sammenheng må det være mellom a, b og c for at $(*)$ skal ha løsning? Angi en basis for $\mathrm{Col(A)}^{\perp}$.

b) Løs $(*)$ når a, b og c er slik at $\mathbf{x} = (0, 1, 1, -1)$ er en løsning, og finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

c) Finn en basis for Row(A) og Col(A).

Oppgave 5

La V være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for V blant de gitte vektorene.

b) Finn en ortogonal basis for V.

Oppgave 6

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A og en egenvektor for hver av dem. Finn også en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

I en modell for befolkningsutviklingen i tre byer A, B og C, ser man kun på flytting mellom byene, og fødsels- og dødstallene innen en og samme by.
Pr. tidsenhet endrer befolkningen seg som følger ved flytting mellom byene:

Fra A flytter 3‰ av befolkningen til B og 2‰ til C.
Fra B flytter 1‰ av befolkningen til A og 1‰ til C.
Fra C flytter 2‰ av befolkningen til A og 3‰ til B.

Dessuten er den interne endringen i befolkningen pr. tidsenhet gitt ved

A: 1 ‰ , B: -1 ‰ , og C: 1‰ .

La $a(t)$, $b(t)$ og $c(t)$ være folketallet i byene A, B og C ved tiden t, og la $\mathbf{y}(t) = (a(t), b(t), c(t))$. Vi bruker en kontinuerlig modell og antar at $a(t)$, $b(t)$ og $c(t)$ er deriverbare funksjoner av tiden t.

b) Finn en matrise B slik at

$$(*) \quad \mathbf{y}' = B\mathbf{y},$$

og finn generell løsning av $(*)$.

c) Ved tiden $t = 0$ er befolkningen i de tre byene gitt ved

A : 150000 , B : 200000 , C : 250000.

Hva blir befolkningsfordelingen på lang sikt, det vil si når $t \to \infty$?

Oppgave 7

La A være en $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{x}$ være en n-vektor slik at $A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mens $A^2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Vis at vektorene $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$ og $A^2\mathbf{x}$ er lineært uavhengige.