Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen, tlf. 73 59 35 28
Espen R. Jakobsen, tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

2. desember 2002
Tid: 09:00–14:00
Bokmål

Hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 10. januar 2003.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i,$$

og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse plan.

Oppgave 2

Løs initialverdiproblemene

a) $xy' + 4y = 8x^4 \, (x > 0), \ y(1) = 2$

b) $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Finn generell løsning av differensialligningene

c) $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^x$

d) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{1 + x^2}.$

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ved å bringe totalmatrisen til systemet på redusert echelon form.

b) Finn en basis for hvert av rommene Null(A), Col(A) og Row(A).

c) Finn en ortogonal basis for Row(A).

Oppgave 4

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

der a er et reelt tall.

a) Avgjør for hvilke a matrisen A er invertibel (inverterbar), og finn A^{-1} når $a = -1$.

La i det følgende $a = 1$.

b) Finn egenverdiene til A, og finn en invertibel (inverterbar) matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$P^{-1}AP = D.$$

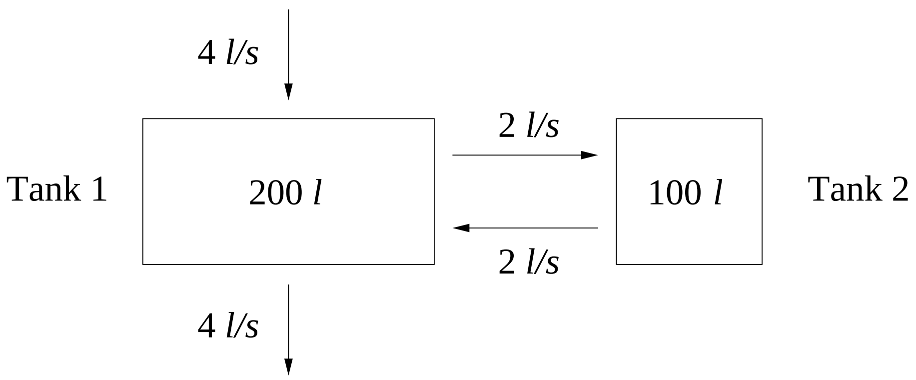
c) Finn generell løsning av differensialligningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Oppgave 5

Vis at hvis P er en ortogonal $n \times n$-matrise, da er $\det P = \pm 1$.

Oppgave 6



De to tankene på figuren inneholder en oppløsning av salt i vann. Inn i Tank 1 strømmer det rent vann med en rate av 4 liter pr. sekund. Mellom tankene og ut av Tank 1 strømmer det saltoppløsning som vist på figuren med de ratene som er angitt. I hver tank holdes saltet jevnt fordelt ved omrøring.

Finn saltmengdene $y_1(t)$ og $y_2(t)$ i Tank 1 og Tank 2 for alle $t \geq 0$ når $y_1(0) = 1\,kg$ salt og $y_2(0) = 7\,kg$ salt. Ved hvilket tidspunkt T er det dobbelt så mye salt i Tank 2 som i Tank 1?