Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

Onsdag 2. desember 1998
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt.
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1
Finn den generelle løsning av

a) $y'' + y' - 2y = 3e^x - 4x$

b) $y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos x$.

c) Bestem konstantene a og b slik at alle løsninger av $y'' + y' - 2y = 0$ også er løsninger av

$$y''' + ay'' + by' - 2y = 0.$$

Oppgave 2

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & -13 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

og likningssystemet

$$(*) \qquad Ax = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

der a, b og c er reelle konstanter.

a) Avgjør for hvilke a, b, c likningssystemet $(*)$ har løsning.

b) Løs $(*)$ når $a = -4$, $b = 2$ og $c = 3$. Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$ (nullrommet til A).

c) Finn en basis for $\mathrm{Row}(A)$ (radrommet til A) og finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$ (kolonne-/søylerommet) til A.

d) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$. Bruk for eksempel resultatet fra **a)**.

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$P^{-1}AP = D.$$

c) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$(*) \qquad x' = Ax.$$

Oppgave 4

a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

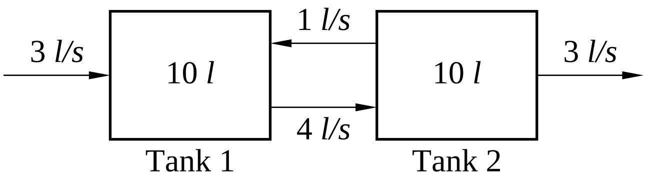
b) Finn (den ortogonale) projeksjonen av $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ned på underrommet V.

Oppgave 5

Finn en 2×2-matrise A slik at differensiallikningssystemet $x' = Ax$ har generell løsning

$$x = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6



De to tankene på figuren inneholder 10 liter hver av en oppløsning av salt i vann. Inn i Tank 1 strømmer det rent vann med en rate av 3 liter pr. sekund. Mellom tankene og ut av Tank 2 strømmer det saltoppløsning som vist på figuren med de ratene som er angitt. I hver tank holdes saltet jevnt fordelt ved omrøring.

Ved tiden $t = 0$ inneholder Tank 1 300 g salt og Tank 2 200 g salt. Finn saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i de to tankene for alle $t \geq 0$.