Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Nils A. Baas
Idar Hansen
Alexei Rudakov
Telefon: 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

Bokmål
Onsdag 1. desember 1999
Kl. 09.00-14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt
- Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Sensuren faller i uke 2.

Oppgave 1

a) Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = -1 + i,$$

og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse plan.

b) La w være den løsningen fra a) som ligger i annen kvadrant. Finn et positivt helt tall n slik at w^n er reell.

Oppgave 2

a) Løs differensialligningen

$$xy' + 2y = \cos x, \;\; x > 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \;\; y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

Finn den generelle løsningen av differensialligningene

c) $y'' - 2y' + 5y = 10 \sin x$

d) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}, \;\; x > 0.$

Oppgave 3

Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensialligningen

$$my'' + ky = \cos \omega t$$

der $m = 2$ og $k = 8$. For hvilke ω vil løsningen $y(t)$ ikke være begrenset når $t \to \infty$?

Oppgave 4

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ved å bringe totalmatrisen (den augmenterte matrisen) til systemet på redusert echelon form. Bestem også en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

b) Finn en basis for $\mathrm{Row}(A)^{\perp}$ og $\mathrm{Col}(A)$.

Oppgave 5

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1} = P^T$ og $P^T AP = D$.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Oppgave 6

Et kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$(*) \qquad 8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 = 80.$$

Innfør et nytt, rotert koordinatsystem slik at $(*)$ kommer på enklest mulig (standard) form. Bestem hva slags kjeglesnitt $(*)$ representerer, skisser dette i x_1x_2-planet, og tegn også inn aksene i det nye koordinatsystemet.

Oppgave 7

La V være underrommet i $\mathbf{R}^4$ gitt ved

$$V = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

a) Finn en basis for $V^\perp$.

b) Finn en 3×4 -matrise A slik at $V = \text{Null}(A)$.