Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad: 73 59 35 13

EKSAMEN I FAG SIF5009/5010 MATEMATIKK 3

Mandag 14. august 2000
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne, tillatt.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1
Finn en løsning av differensialligningen

$$xy' - 3y = x^3$$

slik at $y(1) = 0$.

Oppgave 2
Finn den generelle løsning av følgende differensialligninger

a) $y'' + ay = x$
for $a = \pm 1$.

b) $y'' + 2y' + y = e^{bx}$
for forskjellige verdier av $b \in \mathbb{R}$.

c) $y'' + 2y' + y = \sqrt{x}\, e^{-x}$ $(x > 0)$.

Oppgave 3
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ og vektoren } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3\beta \\ 2\beta \\ \beta \end{bmatrix} \text{ der } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Drøft dimensjonen til kolonnerommet til A, $\mathrm{Col}(A)$, og nullrommet til A, $\mathrm{Null}(A)$, for forskjellige verdier av α.

b) Drøft for hvilke α og β ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsbart, og løs systemet for $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

Oppgave 4

a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^5$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

og finn (den ortogonale) projeksjonen, $\mathrm{proj}_V\, \mathbf{b}$, av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ned på underrommet } V.$$

b) La $U = \{\mathbf{x} \mid \mathrm{proj}_V\, \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Finn en basis for U.

Oppgave 5
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

a) To av egenverdiene til A er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = [4 \quad 0 \quad -3 \quad 1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^\top$. Hva er de andre egenverdiene og egenvektorene?

b) Begrunn at A^{-1} eksisterer og angi også egenverdiene og egenvektorene til A^{-1}. (Du skal **ikke** finne A^{-1}.)

Oppgave 6
Et kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$3x^2 + 2\sqrt{2}\,xy + 4y^2 = a$$

Finn alle a slik at kjeglesnittet ligger innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ og utenfor sirkelen $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.