Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen 7359 3512
Olav Njåstad 7359 3513

Nynorsk

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

14. august 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP30S).
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren fell 4. september 2002.

Alle svar skal grunngjevast, og det skal gå klårt fram korleis svara er oppnådde.

Oppgave 1 *Finn alle komplekse løysingar av*

$$(z+1)^4 = (z-1)^4$$

og teikn løysingane i det komplekse planet.

Oppgave 2 *Gitt initialverdiproblemet*

$$(*) \qquad y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x, \quad y(1) = 0, \quad x > 0.$$

a) *Finn løysinga $y = y(x)$ av $(*)$.*

b) *Tilnærm $y(\frac{5}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengd $h = \frac{1}{2}$.*

Oppgave 3

a) *Løys initialverdiproblemet*

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Finn den generelle løysinga av differensiallikningane

b) $y'' - a^2 y = e^x, \quad a \geq 0$ *er eit reelt tal,*

c) $y'' + y = \dfrac{1}{\tan x}\ , \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

Oppgave 4 *Gitt matrisa*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{der } \alpha \text{ er eit reelt tal.}$$

a) *Finn* $\det(A)$ *og avgjer for kva verdiar av* α *systemet* $Ax = 0$ *har nøyaktig ei løysing. Finn ein basis for* $\mathrm{Null(A)}$ *når* $\alpha = 1$.

b) *Avgjer for kva verdiar av* α *fylgjande implikasjon gjeld:*

$$u, v, w \text{ er lineært uavhengige} \implies Au, Av, Aw \text{ er lineært uavhengige.}$$

c) *La* $\alpha = 1$. *Finn eigenverdiane og dei tilhøyrande eigenvektorane til* A. *Oppgje ei matrise* P *og ei diagonalmatrise* D *slik at* $A = PDP^{-1}$.

Oppgave 5

a) *Løys likningssystemet:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \\ 4x_1 - 10x_2 + 10x_3 + 2x_4 &= -10 \end{aligned}$$

b) *La*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & -10 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn ein basis for kvart av romma $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ *og* $\mathrm{Row}(A)$.

c) *Finn ein basis for* $\mathrm{Col}(A)^{\perp}$.

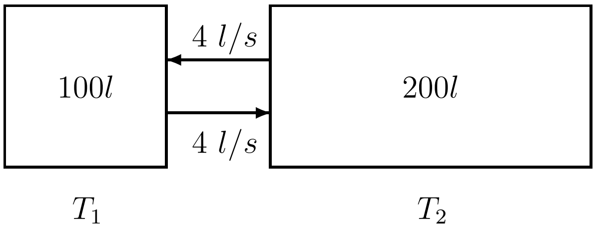
Oppgave 6

a) *Finn eigenverdiane og dei tilhøyrande eigenvektorane til matrisa*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kva for egenverdiar og eigenvektorar har matrisa kA når k er ein konstant, $k \neq 0$?

b)



Ved tidspunktet $t = 0$ inneheld tank T_1 100 l reint vatn, tank T_2 inneheld 200 l vatn med 30 kg salt oppløyst. Saltoppløysinga strøymer mellom tankane med ein fart på 4 liter pr. sekund. Finn saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i dei to tankane for alle $t > 0$.

Oppgave 7 *La U vere ei inverterbar $n \times n$ matrise og A ei vilkårleg $n \times n$ matrise. Vis at A og $U^{-1}AU$ har same eigenverdiar.*